М. СУЛТАНБАЕВ

АЛГЕБРА

БОЮНЧА МААЛЫМДАМА

πрад=180°

$$\mathrm{Sin}^2\alpha+\mathrm{Cos}^2\alpha = 1$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

УДК: 33
ББК: 22,1 Кырг.
С–49.

Рецензенттер: ***К. С. Алыбаев*** – физика-математика илимдеринин доктору, профессор;
Е. Е. Син – педагогика илимдеринин доктору, профессор;
К. Ө. Самсалиева – КББАнын табигый-математикалык лабораториясынын илимий кызматкери.

КББАнын окумуштуулар кеңешинин 2016-жылдын 30-ноябрь №10 жыйынынын токтомунда бекитилген.

Султанбаев Маданбек.
С–49 **Алгебра.** Маалымдама. *9-класс.* – Б.: 2017. 168 б.

ISBN 978-9967-

Бул «Алгебра боюнча маалымдама» китеби, жалпы билим берүүчү орто мектептердин окуучуларына жана жаш математика мугалимдерине колдонмо катары арналат.

Китепте ар түрдүү татаалдыктагы маселе-мисалдар чыгарылыштары менен берилген. Бул, окуучулардын өз алдынча билимин өркүндөтүүгө өбөлгө түзөт.

ISBN 978-9967-

Кириш сөз

Кымбаттуу окуучулар! Бул «Алгебра боюнча маалымдама» китеби жалпы билим берүүчү орто мектептердин 9-классынын математика курсунун программалык материалдарына негизделип түзүлдү.

Китепте квадраттык функция, квадраттык теңдемелер, теңдемелер системалары, арифметикалык жана геометриялык-поргрессиялар, рационалдык көрсөткүчтүү даража жана тригонометриянын элементеринен аныктамалар, эрежелер, формулалар кыскача түрдө баяндалды.

Теориялык алган билимди практика жүзүндө көнүгүүлөрдү аткарууда колдоно билүүгө карата ар түрдүү татаалдыктагы мисалдардын, маселелердин чыгарылыштары берилди.

Бул маалымдама окуучунун китеп менен өз алдынча иштеп, математика боюнча билимин өркүндөтүүсүнө шарт түзүү менен бирге, негизги (9-жылдык) мектептин математика курсу боюнча бүтүрүү экзаменине даярданууга берилген тапшырмаларды аткарууда бир топ жеңилдиктерди жаратат.

Силерге илим-билим жолунда ак жол, албан-албан ийгилик каалайм.

Автор.

Китеп боюнча ойлорду жана сын-пикирлерди
«Кут-Билим сабак» гезитине бериңиздер.
Байланыш телефон: **0554 44 06 28.**

I глава. Квадраттык функция

1.1. Функция, функциянын аныкталуу областы жана маанилеринин областы

Аныктама

Эгерде x өзгөрмөсүнүн аныкталуу областынан алынган каалаган маанисине берилген эреже аркылуу $y=f(x)$ сан туура келсе, анда y өзгөрүлмөсү x өзгөрүлмөсүнүн функциясы деп аталат.

Мында x – көз каранды эмес чондук же аргумент деп аталат. y– көз каранды өзгөрмө деп аталат.

$y=f(x)$ функциясы мааниге ээ боло турган x өзгөрмөсүнүн маанилеринин көптүгү функциянын аныкталуу областы деп аталат.

y өзгөрмөсүнүн кабыл алган маанилеринин көптүгү функциянын маанилеринин областы деп аталат.

1-мисал. $f(x) = 5x^2 - 2x + 7$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу: $5x^2 - 2x + 7$ туюнтмасы бүтүн туюнтма болгондуктан, каалаган x саны үчүн мааниге ээ болот. Функция бардык x үчүн аныкталат.

Жообу: $D(f)=R$.

2-мисал. Функциялардын аныкталуу областын тапкыла.

а) $f(x) = \frac{x-7}{x+5}$; $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$;

Чыгаруу: а) $\frac{x-7}{x+5}$ туюнтмасы бөлчөктүн бөлүмү $x + 5 \neq 0$ болгондо мааниге ээ болот. Демек $x \neq -5$ болгондо функция аныкталат.

Жообу: $x \neq -5$. –5 тен башка бардык сандар.

б) $\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ туюнтмасы $\frac{x+2}{x-3} \geq 0$ болгондо мааниге ээ болот. Бул барабарсыздыкты чыгарсак, $x \leq -3$, $x > 3$ болот.

Жообу: $(-\infty;\ -3] \cup (3;\ +\infty)$.

3-мисал. Функция $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$ формуласы менен берилген.

а) $f(-3)$; б) $f(-0{,}5)$; в) $f(0)$; г) $f\left(\frac{1}{4}\right)$ди тапкыла.

Чыгаруу: x тин берилген маанилерин формулага коюп, эсептөө жүргүзөбүз.

а) $f(-3) = 2(-3)^2 + 7(-3) - 4 = 18 - 21 - 4 = -7$;

б) $f(-0{,}5) = 2(-0{,}5)^2 + 7(-0{,}5) - 4 = 2 \cdot 0{,}25 - 3{,}5 - 4 = = -7$;

в) $f(0) = 2 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 - 4 = -4$;

г) $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot (\frac{1}{4})^2 + 7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - 4 = 2\frac{1}{16} + 7\frac{1}{4} - 4 = \frac{1}{8} + 1\frac{3}{4} - 4 = = 1\frac{7}{8} - 4 = -2\frac{1}{8}$.

4-мисал. Эгер: а) $f(x) = 5x - 17$

б) $f(x) = x^2 - x - 12$ болсо, $f(x) = -6$ болгондогу x тин маанисин тапкыла.

Чыгаруу:

а) $5x - 17 = -6$

$5x = -6 + 17$

$5x = 11$

$x = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$

б) $x^2 - x - 12 = -6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$D = (-1)^2 - 4(-6) = 1 + 24 = 25$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$

$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

1.2. Функциянын нөлү
Өсүүчү жана кемүүчү функциялар
1-аныктама

Функциянын маанисин нөлгө айландыруучу аргументтин маанилери функциянын нөлдөрү деп аталат.

2-аныктама

Эгерде кандайдыр бир аралыктан алынган аргументтин чоң маанисине функциянын да чоң мааниси туура келсе, анда ал аралыкта функция өсүүчү деп аталат. Эгерде аргыменттин чоң маанисине функциянын кичине мааниси туура келсе, анда ал аралыкта функция кемүүчү деп аталат. Б.а. берилген аралыкта $x_1 > x_2$ болгондо $f(x_1) > f(x_2)$болсо, $f(x)$функциясы өсүүчү, $x_1 > x_2$ болгондо $f(x_1) < f(x_2)$болсо, $f(x)$функциясы кемүүчү болот.

1-мисал. Фукциялардын нөлдөрүн тапкыла.

а) y=3x–15; б) $y=\frac{x^2+5}{x^2+3}$; в) $y=\frac{12}{(x-7)(x+1)}$; г)$y=\frac{x^2-9}{x+2}$.

Чыгаруу: а) y=3x–15функциясынын нөлдөрүн табуу үчүн 3x–15=0 теңдемесин чыгарабыз

3x=15

x=15:3

x=5. демек x=5 бул функциянын нөлү болот.

б) $y=\frac{x^2+5}{x^2+3}$; $x^2 + 5 = 0$ бул теңдеменин тамырмалары жок. Ошондуктан бул функциянын нөлү жок.

в) $y=\frac{12}{(x-7)(x+1)}$; $\frac{12}{(x-7)(x+1)} = 0$ теңдемеси чыгарылышка ээ эмес, ошондуктан анын нөлү жок.

г) $y=\frac{x^2-9}{x+2}$; $x^2 - 9 = 0$

(x–3)(x+3)

x–3=0 x=3

x+3=0 x=–3.

Бул функциянын нөлдөрү x=3 жана x=–3.

2-мисал. Функциялардын өсүү, кемүү аралыктарын тапкыла.

а) y= 5x–3; в) $y = x^2$;

б) y= –2x+7;г) y=(3–x)^2

Чыгаруу: а) y=5x–3 функциясы бардык сан огунда өсүүчү болот.

б) y=–2x+7 бул функциянын бурчтук коэффициенти k=–2 терс сан, ошондуктан функция бардык сан огунда кемүүчү болот.

в)$y = x^2$функциясы $x \leq 0$ болгондо, б.а. (–∞; 0] аралыгында кемийт, x≥ 0 болгондо, б.а. [0;+ ∞) аралыгында өсөт.

г) y=(3–x)^2 функциясы x≤ 3 б.а. (–∞; 3] аралыгында кемийт, x≥3 б.а. [3;+ ∞) аралыгында өсөт.

1.3. Жуп жана так функциялар

Аныктама

Эгерде функциянын областынан алынган ар бир х саны үчүн:

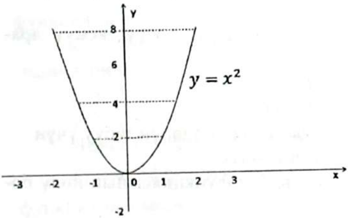
1) $f(-x) = f(x)$ барабардыгы аткарылса, анда $f(x)$ функциясы жуп функция деп аталат.

2)$f(-x) = -f(x)$ барабардыгы аткарылса, анда *f(x)* функциясы так функция деп аталат.

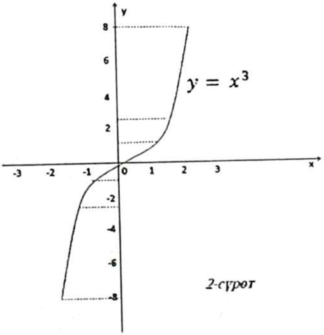
1-мисал. y=x^2 жана y=$\frac{1}{x^6}$функциялары жуп функциялар, анткени $(-x)^2 = x^2$ жана $\frac{1}{(-x)^6} = \frac{1}{x^6}$; мында $x \neq 0$.

2-мисал. $y = x^3$ жана y=$\frac{1}{x^7}$функциялары так функциялар, анткени $(-x)^3 = -x^3$жана $\frac{1}{(-7)^7} = -\frac{1}{x^7}$, мында $x \neq 0$.

Жуп функцияларынын графиги ордината огуна карата симметриялуу болот(1-сүрөт).



1-сүрөт



2-сүрөт

Так функциянын графиги координаталар башталышына карата симметриялуу болот (2-сүрөт).

y=ax+b түрүндөгү сызыктуу функциялар жуп да,так да болбойт.

1.1.– 1.3. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

1. а) $f(x)=7x+2$; в) $f(x)=\frac{3x}{(x-5)(x+2)}$;

б) $f(x)=2x^2+5x+1$; г) $f(x)=2x+\frac{9}{x}-4$.

Чыгаруу:

а) жана б) $7x+2$ жана $2x^2-5x+1$ функциялары бүтүн туюнт–малар. Ошондуктан $f(x)=7x+2$ жана $f(x)=2x^2-5x+1$ функцияларынын аныкталуу областы бардык анык сандар.

в) $\frac{3x}{(x-5)(x+2)}$ бөлчөктүү туюнтмасы $x=5$ жана $x=-2$ болгондо мааниге ээ болот.

Демек $f(x)=2x+\frac{3x}{(x-5)(x+2)}$ функцияларынын аныкталуу облас-ты $x=5$ жана $x=-2$ сандарынан башка бардык анык сандар.

г) $f(x)=2x+\frac{9}{x}-4$функцияларынын аныкталуу $x=0$ санынан башка бардык анык сандар.

2. Төмөндөгү функциялардын нөлдөрүн, өсүү, кемүү ара-лыктарын тапкыла.

а) $y=-5x+3$, в) $y=(7-x)^2$

б) $y=x^2+5$ г) $y=(1+x)^2$

Чыгаруу: а) $y=-5x+3$ функциясынын нөлдөрүн табуу үчүн

$-5x=-3$теңдемени чыгарабыз.

$x=-3:(-5)$ $x=0{,}6$демек 0,6 саны бул функциясынын нөлү болот.

$y=-5x+3$ функциясынын бурчтук коэффициенти $k=-5$ терс сан, ошондуктан функция бүткүл сан огунда кемүүчү болот.

б) $y=x^2+5$ функциясынын нөлдөрүн табуу үчүн $x^2+5=$ $=0$ теңдемесин чыгарабыз. Бул теңдеме чыгарылышка ээ болбойт. Демек $y=x^2+5$ функциясынын нөлдөрү жок.

$y=x^2+5$ функциясы $(-\infty;0]$ аралыгында кемийт $[0;+\infty)$ аралыгында өсот.

в) $y=(7-x)^2$функциясынын нөлдөрүн табуу үчүн $7-x=0$ теңдемесин чыгарабыз.

$-x=-7$

$x=7$ демек $x=7$ бул функциянын нөлү болот $y=(7-x)^2$ функциясы $x\leq 7$, б. а. $(-\infty;7)$ аралыгында кемийт, $x\geq 7$, б. а. $[7;+\infty)$ аралыгында өсөт.

б) $y(1+x)^2$ функциясынын нөлү х=–1 болот$y = (1+x)^2$ функциясы $x \leq -1, б. а. (-\infty; -1]$ аралыгында кемийт, $x \geq -1$, б. а. $[-1; +\infty)$ аралыгында өсөт.

3. Төмөнкү функциянын жуп же так экендигин аныктагыла.

а) $y=2x^6$ б) $y=3x^2-5$ в) $y=3x^3$ г) $y=x^{-5}$.

Чыгаруу: а) $y=2x^6$ бул функциянын жуп же тактыгын аныктоо үчүн аргументин карама-каршы маанилеринде функциянын маанилерин эсептейбиз.

$x=2$ болсун, анда $y=2 \cdot 2^6 = 2 \cdot 64 = 128$

$x=-2$ болсун, анда $y=2 \cdot (-2)^6 = 2 \cdot 64 = 128$

Аргументин карама-каршы маанилеринде функциянын маанилери барабар. Демек $y=2 \cdot x^6$функциясы жуп фунция болот.

б) $y=3x^2-5$, $x=4$ жана $x=-4$ манилеринде функциянын маанилерин эсептейбиз.

$y=3 \cdot 4^2 - 5 = 3 \cdot 16 - 5 = 48 - 5 = 43$

$y=3 \cdot (-4)^2 - 5 = 3 \cdot 16 - 5 = 48 - 5 = 43$демек $y=3x^2-5$ функциясы жуп функция.

в) $y=3x^3 - 2x^5$, $x=1$ жана $x=-1$ маанилеринде функциянын маанилерин эсептейбиз.

$y=3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^5 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$

$y=3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^5 = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = -3 + 2 = -1.$

Демек бул функция так функция болот.

г) $y=x^{-5}$функциясын $y=\frac{1}{x^5}$ деп алабыз $x=2$, $x=-2$ маанилеринде функциянын маанилерин эсептейбиз.

$y=\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$; $y=\frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32}$демек $y=x^{-5}$ функциясы так функция.

4. $y=\frac{x^4+x-3}{x+5}$ функциясынын жуп да эмес жана так да эмес экендигин көрсөткүлө.

Чыгаруу: Аргументин $x=2$ жана $x=-2$ маанилеринде функциянын маанилерин эсептейбиз.

$y=\frac{2^4+2-3}{2+5} = \frac{16+2-3}{7} = \frac{15}{7}$; $y=\frac{(-2)^4+(-2)-3}{-2+5} = \frac{16-2-3}{3} = \frac{11}{3}$;

Функциянын жуп же так болуу шарттары аткарылган жок. Демек бул функция жуп да, так да эмес.

1.4. Квадраттык функциянын жана квадраттык үч мүчөнүн аныктамалары

1-аныктама.

$y=ax^2+bx+c$ түрүндөгү функция квадраттык функция деп аталат.

2-аныктама.

$y=ax^2+bx+c$ квадраттык функциянын нөлү деп, ал функциянын мааниси нөлгө барабар болгондогу x өзгөрмөсүнүн мааниси аталат.

3-аныктама.

ax^2+bx+c түрүндөгү көп мүчө квадраттык үч мүчө деп аталат.

4-аныктама. ax^2+bx+c квадраттык үч мүчөсүнүн тамыры деп, ал үч мүчөнүн мааниси нөлгө барабар болгондогу x өзгөрмөсүнүн мааниси аталат.

1-мисал. $y=x^2-5x+6$ квадраттык функциясынын нөлдөрүн тапкыла.

Чыгаруу: Бул функциянын нөлдөрүн табуу үчүн x^2-5x+ $+6=0$ квадраттык теңдемесин чыгаруубуз керек.

$D=25-4\cdot6=25-24=1$ $\quad x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2};x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3;$ $x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$ демек $x_1=3$ жана $x_2=2$ сандары $y=x^2-5x+$ $+6$ функциясынын нөлдөрү болот.

2-мисал. x^2-3x-4 квадраттык үч мүчөсүнүн тамырларын тапкыла.

Чыгаруу: x^2-3x-4 квадраттык үч мүчөсүнүн тамырларын табуу үчүн $x^2-3x-4=0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

$D=(-3)^2-4\cdot(-4)=9+16=25 x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2};$

$x_1=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4,\quad x_2=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1.$

Демек $x_1=4$ жана $x_2=-1$ сандары x^2-3x-4 квадраттык үч мүчөсүнүн тамырлары болот.

3-мисал. -2; 3; $\sqrt{5}$ сандарынын кайсылары төмөндө берилген квадраттык үч мүчөнүн тамырлары болот.

а) $x^2 - 3x$; б) $2x^2 + 4x$; в) $x^2 - 5$; г) $x^2 - x - 6$.

Чыгаруу: а) x өзгөрмөсүнүн -2; 3; $\sqrt{5}$ маанилери боюнча $x^2 - 3x$ үч мүчөсүнүн маанилеринэсептейбиз.

$x = -2$; $2^2 - 3 \cdot (-2) = 4 + 6 = 10$; демек $x=-2$ тамыр болбойт.

$x = 3$; $3^2 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$; демек $x=3$ тамыр болот.

$x = \sqrt{5}$. $(\sqrt{5})^2 - 3 \cdot \sqrt{5} = 5 - 3\sqrt{5}$; демек $x=5$ тамыр болбойт.

б) $x = -2$; $2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = 8 - 8 = 0$ демек $x=-2$ тамыр болот.

$x = 3$; $2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = 18 + 12 = 30$; демек $x=3$ тамыр болбойт.

$x = \sqrt{5}$; $2 \cdot (\sqrt{5})^2 + 4 \cdot \sqrt{5} = 10 + 4\sqrt{5}$; демек $x = \sqrt{5}$ тамыр болбойт.

в) $x = -2$;$(-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1$, демек $x=-2$ тамыр болбойт.

$x = 3$; $3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$, демек $x=3$ тамыр болбойт.

$x=\sqrt{5}$; $(\sqrt{5})^2 - 5 = 5 - 5 = 0$ демек $x=\sqrt{5}$ тамыр болот.

г) $x=-2$; $(-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$ демек $x=-2$ тамыр болот.

$x=3$; $3^2 - 3 - 6 = 9 - 9 = 0$ демек $x=3$ тамыр болот.

$x=\sqrt{5}$; $(\sqrt{5})^2 - \sqrt{5} - 6 = 5 - \sqrt{5} - 6 = -\sqrt{5} - 1$ демек $x=\sqrt{5}$тамыр болбойт.

4-мисал. Квадраттык функциянын нөлдөрүн тапкыла.

а) $y=x^2 - 9x$; в) $y=x^2 - 6x + 5$;

б) $y=x^2 + 25$; г) $y=5x^2 + 6x + 17$.

Чыгаруу: а) $y=x^2 - 9x$ квадраттык функциясынын нөлдөрүн табуу үчүн

$x^2 - 9x = 0$ квадраттык теңдемесинин тамырын табабыз.

$x(x-9)=0$

$x=0$

$x-9=0$

$x=9$ демек $y=x^2 - 9x$ функциясынын нөлдөрү $x=0$ жана $x=9$ сандары болот.

б) $y=x^2+25$. б) $x^2+25=0$ теңдемесинин тамырын табабыз: $x^2=-25$ бул теңдеменин тамыры жок. Демек $y=x^2+25$ функциясынын нөлү жок.

в) $y=x^2-6x+5$, $x^2-6x+5=0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

$D=(-6)^2-4\cdot(5)=36-20=16$

$x_{1/2}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm4}{2}$; $x_1=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5$; $x_2=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$

Демек, $x=5$; $x=1$ сандары $y=x^2-6x+5$ квадраттык функциясынын нөлдөрү болот.

в) $y=5x^2+6x+17$.

$5x^2+6x+17=0$. $D=36-4\cdot5\cdot17=36-340=-304$ $D<0$ ошондуктан бул теңдеме чечимге ээ болбойт.

Демек, $y=5x^2+6x+17$ квадраттык функциясынын нөлдөрү жок.

1.5. Квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүлөргө ажыратуу

1-теорема. Эгерде ax^2+bx+c квадраттык үч мүчөнүн тамырлары x, жана x_2 болсо, анда $ax^2+bx+c=a(x-x)$, $(x-x_2)$ болот.

2-теорема. Эгерде ax^2+bx+c квадраттык үч мүчөсү тамырларга ээ болбосо б.а. $D=b^2-4ac<0$ болсо, анда ax^2+bx+c квадраттык үч мүчөсү көбөйтүүлөргө ажырабайт.

1-мисал. $3x^2+8x+5$квадраттык үч мүчөсүн көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

Чыгаруу: $3x^2+8x+5=0$ квадраттык теңдемени чыгарабыз.

$$D=64-4\cdot3\cdot5=64-60=4$$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{-8\pm2}{6};$$

$$x_1=\frac{-8+2}{6}=\frac{-6}{6}=-1; \qquad x_2=\frac{-8-2}{6}=\frac{-10}{6}=-\frac{5}{3}$$

Демек, $3x^2+8x+5=3(x+1)(x+\frac{5}{3})$ болот.

2-мисал. $4x^2-5x+2$ квадраттык үч мүчөсүн көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

Чыгаруу: $4x^2-5x+2=0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

$D-(-5)^2-4\cdot4\cdot2=25-32=-7$

Демек, D<0, Квадраттык теңдеменин анык тамырлары жок.

2-теореманын негизинде $4x^2-5x+2$ квадраттык үч мүчөөсү көбөйтүүчүлөргө ажырабайт.

3-мисал. Төмөндөгү үч мүчөдөн эки мүчөнүн квадратын бөлүп алгыла.

а) $3x^2+18x+25$; б) $2x^2-8x+11$.

Чыгаруу: x^2тын коэффициентин кашаанын сыртына чыгарабыз.

$3x^2+18x+25=3(x^2+6x+\frac{25}{3})=$

$=3(x^2+2\cdot 3\cdot x+9-9+\frac{25}{3})=3((x+3)^2-\frac{2}{3})=3(x+3)^2-2.$

б) $2x^2-8x+11=2(x^2-4x+4-4+\frac{11}{2})=2\left(x^2-2\cdot 2\cdot x+4+\frac{3}{2}\right)=$

$=2(x-2)^2+3.$

1.4.–1.5. Көнүгүүлөр үчүн тапшырма

5) Квадраттык үч мүчөнүнтамырларын тапкыла.

а) $x^2-2x-15$ в) $3x^2-8x+5$

б) $4x^2 -- 3x-1$ г) $-4x^2-2x-0{,}25$

Чыгаруу: а) $x^2-2x-15$ квадраттык үч мүчөсүнүн тамырларын табуу үчүн $x^2-2x-15=0$ квадраттык теңдемесин чыгаруу керек.

$D=(-2)^2-4\cdot(-15)=4+60=64$

$x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}; x_1=\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5; x_2=\frac{2-8}{2}=\frac{-6}{2}=-3.$

Демек, бул үч мүчөнүн тамырлары $x_1=5$, $x_2=-3$ сандары болот.

б) **Чыгаруу:** $4x^2-3x-1=0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

$D=(-3)^2-4\cdot 4\cdot(-1)=9+16=25$

$$x_{\frac{1}{2}}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{8}=\frac{3\pm 5}{8};\ x_1=\frac{3+5}{8}=\frac{8}{8}=1x_2=$$

$$=\frac{3-5}{8}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$$

Демек, $4x^2-3x-1$ үч мүчөсүнүн тамырлары x_1=1, x_2=$-\frac{1}{4}$сандары болот.

в) **Чыгаруу:** $3x^2-8x+5=0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

D=$(-8)^2-4\cdot3\cdot5=64-60=4$

$x_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{8\pm2}{6};\ x_1=\frac{8+2}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3};x_2=\frac{8-2}{6}=\frac{6}{6}=1.$

Демек , $x_1=\frac{5}{3}$ жана $x_2=1$ сандары $3x^2-8x+5$ квадраттык үч мүчөнүн тамырлары болот.

г) $-4x^2-2x-0{,}25=0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

D=$(-2)^2-4\cdot(-4)\cdot(-0{,}25)=4-4=0$

$$x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{-8}=-\frac{1}{4};$$

Демек , $-4x^2-2x-0{,}25$ квадраттык үч мүчөсүнүн тамырлары $x_1=-\frac{1}{4}$ жана $x_2=-\frac{1}{4}$ сандары болот.

6. Квадраттык функциянын нөлдөрүн тапкыла.

а) $y=2x^2-3x-2$; б) $y=x^2+7x$;

в) $y=7x^2-3x+2$; г)$y=x^2-x-12$.

Чыгаруу: а) $y=2x^2-3x-2$ квадраттык функциясынын нөлдөрүн табуу үчүн $2x^2-3x-2=0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

D=$(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)=9+16=25$

$x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm5}{4};\ x_1=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2;x_2=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.$

Демек , бул функциянын нөлдөрү $x_1=2$ жана $x_2=-\frac{1}{2}$ сандары.

б) $y=x^2+7x$ бул функциянын нөлдөрүн табуу үчүн $x^2+7x=0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

$$x(x+7)=0$$

$$x=0,\qquad x+7=0\Rightarrow x=-7$$

Демек , $x_1 = 0$ жана $x_2 = -7$ сандары $y = x^2 + 7x$ функциясынын нөлдөрү болот.

в) $y = 7x^2 - 3x + 2$бул функциянын нөлдөрүн табуу үчүн $7x^2 - 3x + 2 = 0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 9 - 56 = -47$$

$D < 0$ болгондуктан бул квадраттык теңдеменин тамырлары жок. Демек $y = 7x^2 - 3x + 2$ функциясынын нөлдөрү болбойт.

г)$y = x^2 - x - 12$ функциясынын нөлдөрүн табуу үчүн $x^2 - x - 12 = 0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-12) = 1 - 48 = 49$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2};\ x_1 = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4; x_2 = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Демек , бул функциянын нөлдөрү $x_1 = 4$ жана $x_2 = -3$ сандары болот.

7. Төмөнкү үч мүчөдөн эки мүчөнүн квадратын бөлүп алгыла.

а) $x^2 - 10x + 15$; б) $\frac{1}{6}x^2 - x + 3$;

в) $5x^2 + 40x + 73$; г) $3x^2 - 30x + 77$.

Чыгаруу:

а) $x^2 - 10x + 15 = x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25 + 15 =$

$$= (x - 5)^2 - 10$$

б) x^2тын коэффициентин кашаанын сыртына чыгарып алабыз.

$$\frac{1}{6}x^2 - x + 3 = \frac{1}{6}(x^2 - 6x + 18) = \frac{1}{6}(x^2 - 2 \cdot 3x + 9 + 9) =$$

$$= \frac{1}{6}(x - 3)^2 + \frac{3}{2}$$

в) x^2тын көбөйтүүчүсүн кашаанын сыртына чыгарабыз. $5x^2 + 40x + 73 = 5(x^2 + 8x + \frac{73}{5}) = 5(x^2 + 2 \cdot 4x + 16 - 16 +$ $+ \frac{73}{5}) = 5((x + 4)^2 - 1\frac{2}{5}) = 5(x + 4)^2 - 7;$

г) $3x^2-30x+77=3(x^2-10x+\frac{77}{3})=3(x^2-2\cdot5x+25-$
$-25+\frac{77}{3})=3\left((x-5)^2+\frac{2}{3}\right)=3(x-5)^2+2.$

8. Квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.
а) $y^2-8y+15$; б) $2x^2+5x-1$;
в) $-4x^2+7x-6$; г) $3x^2-2x-5$.

Чыгаруу: а) $y^2-8y+15=0$ теңдемесин чыгарып, үч мүчөнүн тамырларын табабыз.

$$D=(-8)^2-4\cdot1\cdot15=64-60=4$$

$y_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{8\pm2}{2}$; $y_1=\frac{8+2}{2}=\frac{10}{2}=5$; $y_2=\frac{8-2}{2}=\frac{6}{2}=3.$
Демек, 1-теорема боюнча
$y^2-8y+15=(y-5)(y-3)$болот.

б) $2x^2+5x-1=0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз.

$$D=5^2-4\cdot2\cdot(-1)=25+8=33$$

$$x_{1/2}=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4};\ x_1=\frac{-5+\sqrt{33}}{4}=-\frac{5-\sqrt{33}}{4};$$

$x_2=\frac{-5-\sqrt{33}}{4}=-\frac{5+\sqrt{33}}{4}$ үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратуу жөнүндөгү 1-теореманын негизинде төмөндөгүгө ээ болобуз.
$2x^2+5x-1=2\left(x+\frac{5+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{33}}{4}\right)$;

в) $-4x^2+7x-6=0$теңдемесин чыгарып, үч мүчөнүн тамырларын табабыз.

$$D=7^2-4\cdot(-4)\cdot(-6)=49-96=-47$$

Бул теңдеменин $D<0$, демек, теңдеменин тамырлары жок, 2-теорема боюнча $-4x^2+7x-6$ үч мүчөсү көбөйтүүчүлөргө ажырабайт.

г) $3x^2-2x-5=0$ теңдемесинин тамырларын табабыз.

$$D=2^2-4\cdot3\cdot(-5)=4+60=64$$

$$x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{2\pm8}{6};\ x_1=\frac{2+8}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3};$$

$x_2 = \frac{2-8}{6} = -\frac{6}{6} = -1.$

Демек, 1-теорема боюнча төмөнкүгө ээ болобуз.

$3x^2 - 2x - 5 = 3(x+1)\left(x - \frac{5}{3}\right).$

9. Бөлчөктөрдү кыскарткыла.

а) $\frac{3x+1}{3x^2-5x-2}$; б) $\frac{5x^2-7x-24}{5x^2-45}$.

Чыгаруу: а) Бөлчөктүн алымын бөлүмүн көбөйтүүчүлөргө ажыратып алабыз.

$$\frac{3x+1}{3x^2-5x-2} = \frac{3(x+\frac{1}{3})}{3(x-2)(x+\frac{1}{3})} = \frac{1}{x-2};$$

б) $$\frac{5x^2-7x-24}{5x^2-45} = \frac{5(x-3)(x+\frac{8}{5})}{5(x^2-9)} = \frac{5(x-3)(x+\frac{8}{5})}{5(x-3)(x+3)} = \frac{x+\frac{8}{5}}{x+3}.$$

1.6. Кадраттык функциянын графиги
$y = ax^2$ функциясы

$a \neq 0$ еаны үчүн, $y = ax^2$ функциясы төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот:

1. Эгерде $x = 0$ болсо, анда $y = 0$ болот. Функциянын графиги координаталар башталышы аркылуу өтөт.

2. Эгерде $a > 0$ болсо жана $x \neq 0$ болсо, анда $y = ax^2 > 0$ болот. Функциянын графиги, жогорку жарым тегиздикте жайланышат.

Ал эми $a < 0$ болсо жана $x \neq 0$ болсо, анда $y = ax^2 < 0$ болот. Функциянын графиги төмөнкү жарым тегиздикте жайланышат.

3. $y = ax^2$ функциясынын графиги, Oyогуна карата симметриялуу.

4. Эгерде $a > 0$ болсо, анда $y = ax^2$ функциясы $(-\infty;\ 0]$ аралыгында кемүүчү, $[0; +\infty)$аралыгында өсүүчү болот.

Ал эми $a < 0$ болсо, анда $y = ax^2$ функциясы $(-\infty;\ 0]$ аралыгында өсүүчү, $[0; +\infty)$аралыгында да кемүүчү болот.

5. Эгерде $a > 0$ болсо, анда $y = ax^2$ функциясынын маанилеринин областы $[0; +\infty)$ аралыгы болот.

Ал эми $a < 0$ болсо, анда $y = ax^2$ функциясынын маанилеринин областы $(-\infty; 0]$ аралыгы болот.

$y = ax^2$ функциясынын графиги парабола деп аталат. Эгерде $a > 0$ болсо, парабола жогору карай багытталат, $a < 0$ болсо, парабола төмөн карай багытталат.

Парабола менен анын симметрия огунун кесилиш чекити, параболанын чокусу деп аталат.

$y = ax^2$ параболасынын чокусу (0;0) чекити, б.а. координаталар башталышы болот.

1-мисал. $y = x^2$ жана $y = -x^2$ функцияларынын графигин бир эле координаталар системасына түзгүлө.

Чыгаруу: $y = x^2$ жана $y = -x^2$ функцияларынын графигин түзүү үчүн таблицалар түзөбүз.

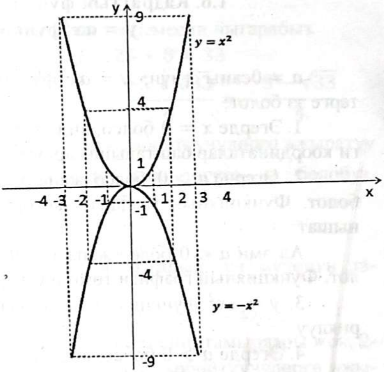
$y = x^2$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = -x^2$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

$y = x^2$ жана $y = -x^2$ функцияларынын графиктери Ox огуна карата симметриялуу болушат.



3-сүрөт

2-мисал. $y = 2x^2$ жана $y = \frac{1}{2}x^2$ функцияларынын графиктерин бир эле координаталар системасына чийгиле.

Чыгаруу: $y = 2x^2$ жана $y = \frac{1}{2}x^2$ функцияларынын графиктерин түзүү үчүн таблицалар түзөбүз.

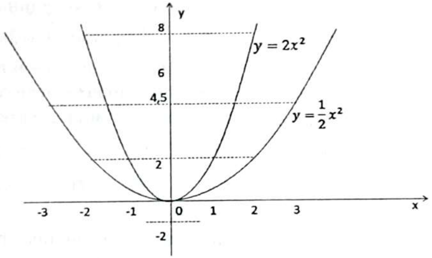
$y = 2x^2$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

$y = \frac{1}{2}x^2$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

4-сүрөттөгү графиктерге байкоо жүргүзсөңөр $y = 2x^2$ функциясынын графиги $y = x^2$ функциясынын графигин эки эсе чоюу аркылуу, ал эми $y = \frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигин $y = x^2$ функциясынын графигин эки эсе кысуу аркылуу алына тургандыгы көрүнүп турат.



4-сүрөт

Аныктама.

$y = ax^2 + bx + c$түрүндөгү формула менен берилген функция квадраттык функция деп аталат. Мында $a \neq 0$ жана b, cсандары каалагандай сандар.

$y = ax^2 + bx + c$ функциясын

$y = a(x + m)^2 + n$ түрүндө жазып алабыз.

Мында,$m = -\frac{b}{2a}$ жана $n = -\frac{b^2-4ac}{4a}$;

$y = a(x + m)^2$функциясынын графигин түзүү үчүн

$y = ax^2$ функциясынын графигин, $m > 0$ үчүн m бирдикке оңду карай, ал эми $m < 0$ үчүн $(-m)$ бирдикке солду карай Oxогун бойлото жылдырабыз.

$y = ax^2 + n$ функциясынын графигин түзүү үчүн $y = ax^2$ функциясынын графигин $n > 0$ үчүн nбирдикке жогору карай, ал эми $n < 0$ үчүн $(-n)$ бирдикке төмөн карай Oyогун бойлото жылдырабыз.

$y = ax^2 + bx + c$ функциясынын графиги чокусу $(m; n)$ чекити болгон парабола болот. Бул параболанын симметрия огу, Oy огуна параллель болгон $x = m$ түз сызыгы эсептелет. $a > 0$ болгондо параболанын тармактары жогору, ал эми $a < 0$ болгондо төмөн карай багытталат.

$y = ax^2 + bx + c$ функциясынын графигин түзүү үчүн төмөндөгүлөрдү аткаруу керек.

1) Параболанын чокусунун координаталарын табабыз. Ал үчүн m абсциссасын $m = -\frac{b}{2a}$ формуласы боюнча таап, анын маанисин $y = ax^2 + bx + c$ формуласына коюп n ординатасын табуу;

2) Параболада жатуучу бир нече чекиттерди табуу;

3) Белгиленген чекиттерди ийри сызык менен туташтыруу.

1-мисал. $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=\frac{1}{3}(x+1)^2$, $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$ жана $y = \frac{1}{3}(x+1)^2 + 2$ функцияларынын графиктерин бир эле координаталар системасына түзгүлө.

Чыгаруу: Берилген функциялардын маанилеринин таблицасын түзөбүз.

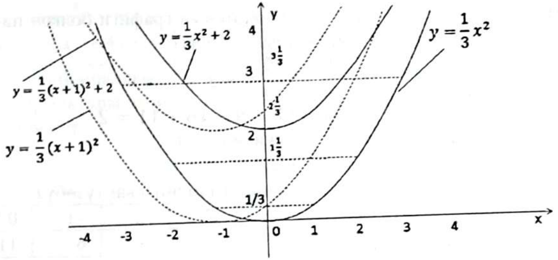
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = \frac{1}{3}x^2$	$5\frac{1}{3}$	3	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	3	$5\frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{3}(x+1)^2$	3	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	3	$5\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{3}x^2 + 2$	$7\frac{1}{3}$	5	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$	2	$2\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	5	$7\frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{3}(x+1)^2 + 2$	5	3	$2\frac{1}{3}$	2	$2\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	5	$7\frac{1}{3}$	$10\frac{1}{3}$

1) $y=\frac{1}{3}x^2$ функциясынын графигин түзөбүз;

2) $y=\frac{1}{3}x^2 + 2$ функциясынын графигин түзөбүз, ал үчүн $y=\frac{1}{3}x^2$ функциясынын графигин 2 бирдикке y огун бойлото жогору жылдырабыз;

3) $y=\frac{1}{3}(x+1)^2$ функциясынын графиги $y=\frac{1}{3}x^2$ функциясынын графигин $0x$ огун бойлото солго бир бирдикке параллель которуудан алынган парабола болот; $y=\frac{1}{3}(x+1)^2$

4) $y=\frac{1}{3}(x+1)^2 + 2$ функциясынын графиги $y=\frac{1}{3}(x+1)^2$ функциясынын графигин $0y$ огун бойлото жогору эки бирдикке параллель которулган парабола болот.



5-сүрөт

2-мисал. Параболанын чокусунун координаттарын тапкыла.

а) $y=(x-4)^2-1$; в) $y=-3x^2+12x-8$;

б) $y=3(x+2)^2+5$; г) $y=2x^2+20x+53$.

Чыгаруу: а) $y=(x-4)^2-1$ функциясынын графиги болгон параболанын чокусунун координаталары $m=4$; $n=-1$ сандары болот, б.а. $(4;-1)$ чекити параболанын чокусу болот.

б) $y=3(x+2)^2+5$ функциясында $m=-2$ жана $n=5$. Демек, бул функциянын графиги параболанын чокусу координаталары $(-2; 5)$ болгон чекит болот.

в) $y=-3x^2+12x-8$, $-3x^2+12x-8$ квадраттык үч мүчөсүнүн толук квадратын бөлүп алабыз:

$$-3x^2+12x-12+4=-3(x^2-4x+4)+4=-3(x-2)^2+4$$

демек, $y=-3(x-2)^2+4$, мында $m=2$; $n=4$.Параболанын чокусу координаталары $(2;4)$ болгон чекит болот.

г) $y=2x^2+20x+53$. $2x^2+20x+53$ үч мүчөсүнүн толук квадратын бөлүп алабыз.

$$2x^2+20x+53=2(x^2+10x+\frac{53}{2})=$$

$$= 2\left(x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 25 - 25 + 26\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\left((x + 5)^2 + 1\frac{1}{2}\right) = 2(x + 5)^2 + 3.$$

Демек, $y=2(x+5)^2+3$, мында $m=-5$; $n=3$. Бул параболанын чокусу координаталары $(-5; 3)$ болгон чекит болот.

3-мисал. Функциянын графигин түзгүлө.

а) $y = x^2 + 6x + 11$ б) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$

Чыгаруу: $y = x^2 + 6x + 11$,Функциянын графиги болгон параболанын чокусунун координаталарын табабыз.

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3;$$

$$n = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 11 = 9 - 18 + 11 = 2$$

Демек, параболанын чокусу (–3; 2) чекити болот.

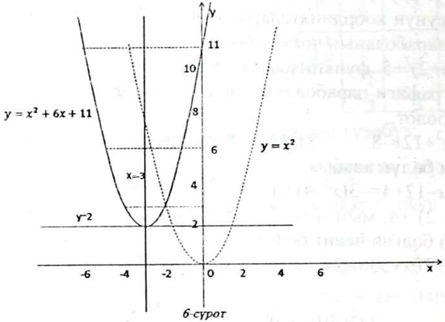
y=$x^2 + 6x + 11 = (x + 3)^2 + 2$

Функциянын бир нече маанилеринин таблицасын түзөбүз.

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
$y = x^2 + 6x + 11$	11	6	3	2	3	6	11

Таблицада көрсөтүлгөн чекиттерди белгилеп, аларды жылма сызык менен туташтырып чыгабыз.

y=$x^2 + 6x + 11 = (x + 3)^2 + 2$функциясынын графиги, y=$x^2$ функциясынын графигин (–3) бирдикке солго, 2 бирдикке жогорку паралель көчүрүүдөн алынат.



6-сурот

б) **Чыгаруу:** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$функциясынын графигинин чокусунун координаталарын табабыз.

$$m = -\frac{4}{2\cdot(-\frac{1}{2})} = \frac{4}{1} = 4$$

$$n = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 5 = -8 + 16 - 5 = 3$$

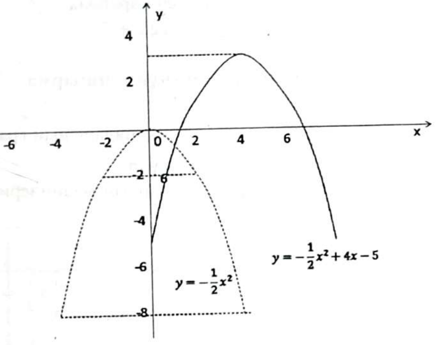
Параболанын чокусу (4;3) чекити болот.

Функциясынын бир нече маанилеринин таблицасын түзөбүз.

$-y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5 = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 3$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y=-\frac{1}{2}x^2+4x-5$	–5	–1,5	1	2,5	3	2,5	1	–1,5	–5

Таблицадагы берилген чекиттерди белгилеп, график чийебиз. Ал тармактары төмөн каралган, чокусу (4; 3) чекити болгон парабола болот.



7-сүрөт

4-мисал. $A(2;-5)$ чекити $y=ax^2-12x+c$ параболасынын чокусу болсо, a жана c сандарын тапкыла.

Чыгаруу: $ax^2-12x+c$ квадраттык үч мүчөсүнүн толук квадратын бөлүп алабыз.

$$a\left(x^2-\frac{12}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2-2\cdot\frac{6}{a}x+\frac{36}{a^2}-\frac{36}{a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x-\frac{6}{a}\right)^2-\left(\frac{36-ac}{a^2}\right)\right)=a\left(x-\frac{6}{a}\right)^2-\frac{36-ac}{a};$$

Демек, $y=a(x-\frac{6}{a})^2-\frac{36-ac}{a}$ болот.

$y=a(x-m)^2+n$ формуласында $(m,\ n)$ чекити параболанын чокусу экендигин эске алсаңар, берилген мисалда m=2; n=–5.

Мындан, $\frac{6}{a}=2$ жана $-\frac{36-ac}{a}=-5$ экендиги келип чыгат.

$$2a=6. -36+ac=-5a$$

$$a = 3. -36 + 3c = -15$$
$$3c = -15 + 36$$
$$3c = 21$$
$$c = 21:3$$
$$c=7$$

Демек, a=3;   c=7 болот. Биз издеген парабола

$$y = 3x^2 - 12x + 7.$$

1.6. Көнүгүүлөр үчүн тапшырма

10. $y=x^2$, $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=-\frac{1}{4}x^2$ функцияларынын графиктерин бир эле координаталар системасына түзгүлө.

Чыгаруу: Берилген функциялардын маанилерин таблицасын түзөбүз.

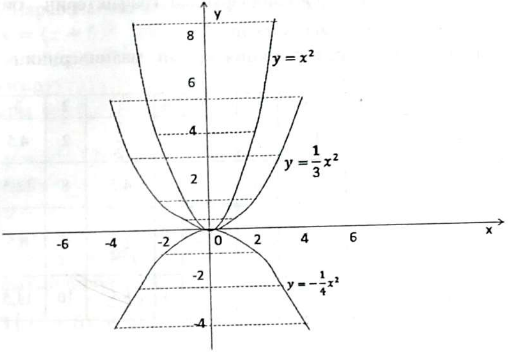
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = \frac{1}{3}x^2$	$5\frac{1}{3}$	3	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	3	$5\frac{1}{3}$
$y = -\frac{1}{4}x^2$	–4	$-2\frac{1}{4}$	–1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	–1	$-2\frac{1}{4}$	–4

Координаталары таблицада көрсөтүлгөн чекиттерди түзүп, функциялардын графигин сызабыз.

$y=x^2$ функциясынын графигин түзөбүз. $y=\frac{1}{3}x^2$ функциясынын маанилери $y=x^2$ функциясынын туура кемүүчү маанилеринен үч эсе кичине болот.

Ошондуктан $y=\frac{1}{3}x^2$ функциясынын графиги $y=x^2$ графигинен Оx огунан Оy бойлото 3 эсе кысуу аркылуу алынат.

$y=-\frac{1}{4}x^2$ функциясынын графиги тармактары төмөн караган парабола болот.



8-сүрөт

11. $y=ax^2$ параболасы $A(5;75)$ чекити аркылуу өтөт, a– параметрин тапкыла.

Чыгаруу: $y=ax^2$ функциясынын формуласына x=5 жана y=75 маанилерин коебуз:

$a \cdot 5^2 = 75$ теңдемесине ээ болобуз теңдемени чыгарып, a
$25a=75$ параметрин табабыз.
$a=75:25$
$a=3$.

12. $y=70x^2$ функциясынын графигинде $A(-3;630)$, $B(2;300)$ жана $C(0,5;17,5)$ чекиттери жатабы?

Чыгаруу: $y=70x^2$ формуласына аргумент x тин маанилерин коюп, эсептөө жүргүзөбүз.

$A(-3;630)$; $y=70x^2 = 70 \cdot (-3)^2 = 70 \cdot 9 = 630$. Демек, бул чекит графикте жатат.

$B(2;300)$; $y=70x^2 = 70 \cdot 2^2 = 70 \cdot 4 = 280$. Демек, бул чекит графикте жатпайт.

$C(0,5;17,5)$; $y=70x^2 = 70 \cdot 0,5^2 = 70 \cdot 0,25 = 17,5$. Демек, бул чекит графикте жатат.

13. $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ жана

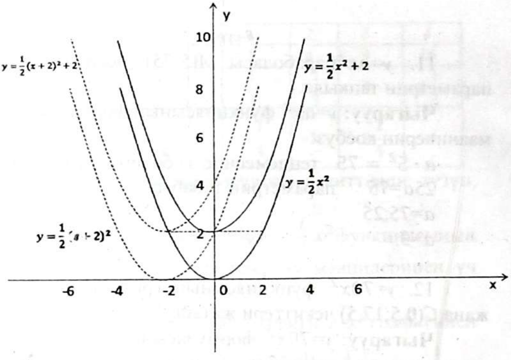
$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$ функцияларынын графиктерин бир эле координаталар системасына түзгүлө.

Чыгаруу: Берилген функциялардын маанилеринин таблицасын түзөбүз.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	4,5	8
$y = \frac{1}{2}(x+2)^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	4,5	8	12,5	18
$y = \frac{1}{2}x^2 + 2$	10	6,5	4	$2\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	4	6,5	10
$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$	4	$2\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	4	6,5	10	14,5	20

1) $y = \frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигин түзөбүз;

2) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$ функциясынын графиги $y = \frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигин Ox огун бойлото солго (–2) бирдикке параллель которуудан алынган парабола болот;



9-сурөт

3) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ функциясынын графиги $y = \frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигин Oy огун бойлото 2 бирдикке жогору параллель которуудан алынган парабола болот;

4) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$ функциясынын графиги $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$ функциясынын графигин Oy огун бойлото 2 бирдикке параллель которуудан алынган парабола болот.

14. Параболанын чокусунун координаталарын тапкыла.

а) $y = (x+5)^2$ б)$y = x^2 - 3$

в) $y = 5(x+4)^2 + 2$ г) $y = 3x^2 + 18x + 23$

Чыгаруу: а) $y = (x+5)^2$ параболасынын чокусунун координаталары m=–5, n=0 б.а. (–5; 0) чекити параболанын чокусу болот.

б) $y = x^2 - 3$ параболасында m=0, n=–3 б.а. (0; –3) чекити параболанын чокусу болот.

в) $y = 5(x+4)^2 + 2$ функциясында m=–4, n=2 болот, б.а. (–4; 2) чекити параболанын чокусу болот.

г) $y = 3x^2 + 18x + 23$, $3x^2 + 18x + 23$ үч мүчөсүнүн толук квадратын бөлүп алабыз.

$$3\left(x^2 + 6x + \frac{23}{3}\right) = 3\left(x^2 + 2 \cdot 3x + +9 - 9 + \frac{23}{3}\right) =$$

$3\left((x+3)^2 - 9 + \frac{23}{3}\right) = 3(x+3)^2 - 4$демек, мында m=–3, n=–4 анда параболанын чокусу (–3; –4) чекити болот.

15. Эгерде (1;–7) чекити $y = x^2 + px + q$параболасынын чокусу болсо, анда p жана q сандарын тапкыла.

Чыгаруу: Маселенин шарты боюнча m=1, n=–7. $y = x^2 + px + q$ функциясында $m = -\frac{p}{2}$, демек $-\frac{p}{2} = 1$, мындан $p = -2$ экендиги келип чыгат, анда

$1^2 + (-2) \cdot 1 + q = -7$ болот.

$$1 - 2 + q = -7$$
$$q = -7 + 1 = -6$$
$$q = -6.$$

Демек, $p = -2$, $q = -6$ болсо, анда $y = x^2 - 2x - 6$ биз издеген функция.

16. $y = ax^2 + bx + c$ функциясынын графиги A(2; 15), B(–1; –3) жана C(–2; –1) чекиттери аркылуу өтөт. a, b жана c сандарын тапкыла.

Чыгаруу: $y = ax^2 + bx + c$функциясындагы х тин берилген маанилерин коюп, аны функциянын берилген маанилерине теңдесек, төмөндөгүдөй теңдемелер системасына ээ болобуз.

$$\begin{cases} a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=15 \\ a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=-3 \\ a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4a+2b+c=15 \\ a-b+c=-3 \\ 4a-2b+c=-1 \end{cases}$$

Системаны чыгарууда алгебралык кошуу жолун пайдаланабыз. Системадагы 1-теңдемеден 3-теңдемени мүчөлөп кемитебиз:

$$4a+2b+c=15$$
$$-$$
$$4a-2b+c=-1$$
$$4b=16$$
$$b=16:4$$

$b=4$ экендиги келип чыгат.

Системадагы 3-теңдемеден 2-теңдемени мүчөлөп кемитебиз.

$$4a-2b+c=-1$$
$$a-b+c=-3$$
$$3a-b=2$$
$$3a-4=2$$
$$3a=2+4$$
$$3a=6$$
$$a=6:3$$
$$a=2.$$

a=2 жана b=4 маанилерин 2-теңдемеге коюп, с нын маанисин табабыз.

$$a-b+c=-3$$
$$2-4+c=-3$$
$$-2+c=-3$$
$$c=-3+2,\ c=-1$$

Ошентип, a=2, b=4, c=–1 болду, анда
$y=ax^2+bx+c$ функциясы $y=2x^2+4x-1$болот.

1.7. Квадраттык барабарсыздык жана аны графиктик жол менен чыгаруу.

Аныктама.

Эгерде барабарсыздыктын сол тарабы квадраттык үч мүчө, ал эми оң тарабы нөл болсо, анда мындай барабарсыздык квадраттык барабарсыздык деп аталат.

Квадраттык барабарсыздыктарды график жолу менен чыгарууда төмөнкүлөрдү аткарабыз.

1) Квадраттык үч мүчөнүн дискриминантын табабыз.

2) Эгерде үч мүчө тамырларга ээ болсо, анда аларды 0х огунда белгилеп, белгиленген чекиттер аркылуу параболаны схемалык түрдө сызабыз.

Эгерде үч мүчө тамырларга ээ болбосо, анда $a > 0$ үчүн жогорку, ал эми $a < 0$ болсо төмөнкү жарым тегиздикте жайгашкан параболанын графигин схемалык түрдө сызабыз.

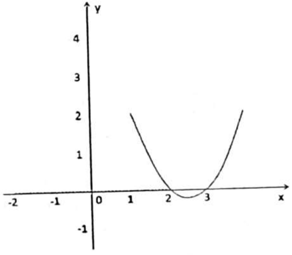
3) Эгерде $ax^2 + bx + c$барабарсыздыгын чыгарсак, анда $0x$ огунан жогору жайгашкан параболанын чекиттери үчүн $0x$ огундагы аралыктарды табабыз. Ал эми $ax^2 + bx + c < 0$ барабарсыздыгын чыгарсак, анда $0x$ огунантөмөн жайгашкан параболанын чекиттери үчүн $0x$ огундагы аралыкты табабыз.

1-мисал. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$барабарсыздыгын чыгаргыла.

Чыгаруу: D=25–24=1.

$x_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2;$

$$x_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$



10-сүрөт

Демек, парабола $0x$ огун абсциссалары 2 жана 3 кө барабар болгон чекиттерде кесип өтөт.

Параболаны схемалык түрдө сызабыз. (10-сүрөт) $y = x^2 - 5x + 6$ функциясы (2;3) аралыгында терс маанилерди ала тургандыгы 10-сүрөттөн көрүнүп турат.

Демек, $x^2 - 5x + 6 \geq 0$барабарсыздыгы $(-\infty; 2]$жана $[3; +\infty)$ аралыгында аткарылат.

Жообу: $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

2-мисал. $-3x^2 - 2x + 8 < 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Чыгаруу: $y = -3x^2 - 2x + 8$ функциянын графиги, тармактары төмөн караган парабола болот.

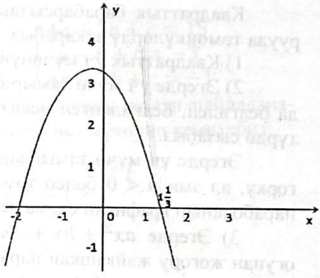
$-3x^2 - 2x + 8 = 0$ теңдемесин чыгарабыз $D = 100$ болот

$x_{\frac{1}{2}} = \frac{2\pm\sqrt{100}}{-6} = \frac{2\pm10}{-6}$;

$$x_1 = \frac{2+10}{-6} = \frac{12}{-6} = -2$$

$$x_2 = \frac{2-10}{-6} = \frac{-8}{-6} = 1\frac{2}{3}$$

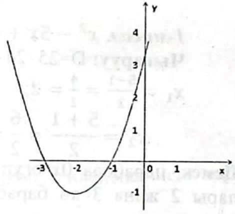
демек, функциянын графиги абциссаларых $= -2$ жана $x = 1\frac{2}{3}$чекиттерде кесилишет.



11-сүрөт

$y = -3x^2 - 2x + 8$ функциясы $(-\infty; -2)$ жана $\left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$ аралыгында терс маанилерди кабыл алат. (11-сүрөт.)

Демек, берилген барабарсыздыктын чыгарылышы $(-\infty;\ -2) \cup \left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$ болот.



12-сүрөт

3-мисал. $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Чыгаруу: $x^2 + 4x + 3 = 0$ теңдемесинин тамырлары $x_1 = -1$ жана $x_2 = -3$ олот. Демек $x^2 + 4x + 3$ функциясынын графиги абсциссалары x=–1 жанах=–3 чекиттеринде 0x огу менен кесилишет. Функция[–3; –1] аралыгында терс маанини кабыл алат.

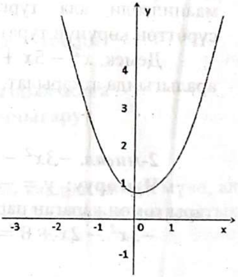
$x^2 + 4x + 3 \leq 0$барабарсыздыгынын чыгарылышы [–3; –1] аралыгы болот.

4-мисал. $5x^2 - 2x + 1 < 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Чыгаруу: $y = 5x^2 - 2x + 1$ функциясынын графиги тармактары жогору караган парабола.

$5x^2 - 2x + 1 = 0$ теңдемени чыгарабыз.

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 4 - 20 = -16 < 0$



13-сүрөт

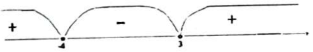
демек бул теңдеме тамырларга ээ болбойт. Парабола Ox огу менен кесилишпейт. Координата тегиздигинде параболанын схемалык түрдө сызалы. x тин каалагандай маанилеринде функция оң маанилерди кабыл алат. Демек, $5x^2 - 2x + 1 < 0$ барабарсыздыгы чыгарылышка ээ болбойт.

1.8. Интервалдар методу.

Интервалдар методу менен барабарсыздыктарды чыгарууда, функциянын белгиси бир аралыктан экинчи аралыкка өткөндө ирети менен өзгөрүү касиети пайдаланылат. Ал үчүн бул аралыктардын биринде функция кандай белгиге ээ болорун билүү жетиштүү.

1-мисал. $x^2 + x - 12 > 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Чыгаруу: $x^2 + x - 12 = 0$ теңдемесинин тамырларын табабыз.



11-сүрөт

$x_1 = 3$; $x_2 = -4$ анда $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + +4)$ болот.

$x_1 = 3$ жана $x_2 = -4$ сандары сан огун $(-\infty; -4)$, $(-4; 3)$ жана $(3; +\infty)$ аралыктарына бөлөт.$(3; +\infty)$ аралыгында $(x - 3)(x + +4)$ туюнтмасы оң экендиги белгилүү.

Ондон $(3; +\infty)$ аралыгынан каалагандай маанини алып,

$(x - 3)(x + 4)$туюнтмасынын белгисин аныктайбыз. Бул аралыкта туюнтма нөлдөн чоң болот.

Демек$(-4; 3)$ аралыгында туюнтма терс маанини кабыл алат.Ошентип барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү болуп, $(x - 3)(x + 4)$көбөйтүндүсүнүн оң маанилерди кабыл алган, $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$ аралыктарынын биригүүсү эсептелет.

2-мисал. $\frac{x+2}{x-7} < 0$барабарсыздыгын чыгаргыла.

Чыгаруу: Барабарсыздыктын алымын жана бөлүмүн $x - 7$ге көбөйтүп алабыз.

$\frac{(x+2)(x-7)}{(x-7)^2}$; $\frac{x+2}{x-7}$ бөлчөгүнүн белгиси

$(x + 2)(x - 7)$көбөйтүндүсүнүн белгиси менен дал келет. Демек, $\frac{x+2}{x-7} < 0$ барабарсыздыгы тең күчтө.

$x = -2$ жана $x = 7$сандары функциянын нөлдөрү болот.

15-сүрөт

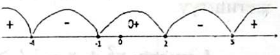
$\frac{x+2}{x-7} < 0$барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү $(-2; 7)$ аралыгы болот.

3-мисал. . $\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x-5} \geq 0$

Чыгаруу: Барабарсыздыктын алымындагы жана бөлүмүндөгү көп мүчөлөрдү көбөйтүүчүлөргө ажыратып алабыз.

$\frac{(x-2)(x+4)}{(x+1)(x-5)} \geq 0$

Берилген бөлчөктүн алымынын жана бөлүмүнүн нөлдөрүн сан огунда белгилейбиз. 2;–4;–1;5 сандары.



16-сүрөт

$x \in (5; +\infty)$болгондо бөлчөктүн алымы да бөлүмү да оң болот. Эми бөлүнгөн беш интервалдын ар биринде бөлчөктүн белгисин аныктап алууга болот. $x = -1$ жана $x = 5$ үчүн бөлчөк аныкталган эмес.

Берилген барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү болуп $(-\infty; -4]$, $(-1; 2]$ жана $(5; +\infty)$эсептелет.

Жообу: $(-\infty; -4] \cup (-1; 2] \cup (5; +\infty)$.

1.7.–1.8. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

17. Барабарсыздыкты чыгаргыла.

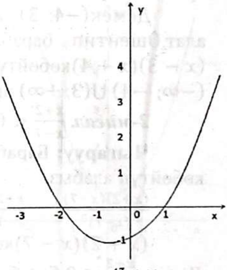
а) $x^2 + x - 2 \geq 0$

б) $3x^2 + 2x - 1 < 0$

Чыгаруу: а) $x^2 + x - 2 \geq 0$,

$y = x^2 + x - 2$ функциясынын графиги тармактары жогору караган парабола болот.

$x^2 + x - 2 = 0$ теңдемени чыгарабыз, анын тамырлары $x_1 = -2$ жана $x_2 = 1$. Демек функциянын графиги абциссалары $x_1 = -2$ жана $x_2 = 1$ чекиттеринде абцисса огу менен кесилишет.



17-сүрөт

Параболаны схемалык түрдө сызабыз (17-сүрөт). x тин маанилери

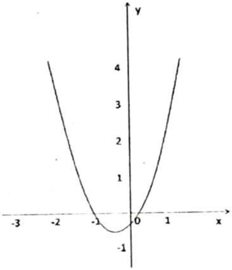
$(-\infty; -2]$ жана $[1; +\infty)$аралыгында жатса, барабарсыздык туура болору 17–сүрөттөн корүнүп турат.

Жообу: $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ болот.

б) $3x^2 + 2x - 1 < 0$

$y = 3x^2 + 2x - 1$функциясынын графиги тармагы жогору караган парабола болот.

Эми $3x^2 + 2x - 1 = 0$ теңдемесин чыгарабыз, анын тамырлары $x_1 = -1$ жана $x_2 = \frac{1}{3}$ болот. Демек, функциянын графиги абциссалары $x_1 = -1$ жана $x_2 = \frac{1}{3}$ чекиттеринде Ox огу менен кесилишет. Параболаны схемалык түрдө сызабыз. 18-сүрөттү карасак x тин маанилери $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$ аралыгында барабарсыздыктын туура болору көрүнүп турат.



18-сүрөт

Жообу: $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

18. Барабарсыздыкты чыгаргыла.

а) $5x^2 - 3 < 3x^2 - x$ б)$-3x^2 + 2x \geq -x^2 + 3x - 18$

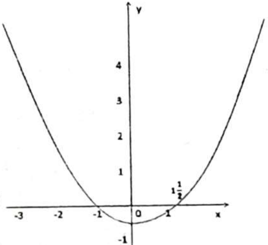
Чыгаруу:

а) $5x^2 - 3 < 3x^2 - x$

$$5x^2 - 3 - 3x^2 + x \quad < 0$$

$$2x^2 + x - 3 < 0$$

$2x^2 + x - 3 = 0$ функциясынын графиги тармагы жогору караган парабола болот. $2x^2 + x - 3 = 0$ теңдемесинин тамырларын табабыз. $x_1 = -1$ жана $x_2 = 1\frac{1}{2}$ болот. Демек, функциянын графиги абциссалары $x_1 = -1, x_2 = 1\frac{1}{2}$ чекиттеринде Ox огу менен кесилишет. Параболаны схемалык



19-сүрөт

түрдө сызабыз. Бул барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү $\left(-1;\ 1\frac{1}{2}\right)$көптүгү боло тургандыгы 19-сүрөттө көрүнүп турат.

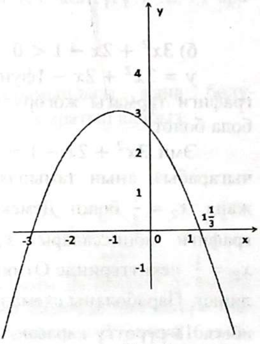
Жообу: $\left(-1; 1\frac{1}{2}\right)$.

б)$-3x^2 + 2x \geq -x^2 + 3x - 18$
$-3x^2 + 2x + x^2 - 3x + 18 \geq 0$
$-2x^2 - 5x + 18 \geq 0$

$-2x^2 - 5x + 18 = 0$ функциясынын графиги тармактары төмөн караган парабола болот.

$-2x^2 - 5x + 18 = 0$ теңдемесинин тамырларын табабыз, алар $x_1 = -3$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$ болот.

Бул функциянын графиги абциссалары $x_1 = -3$ жана $x_2 = 1\frac{1}{3}$ чекиттеринде Ox огу менен кесилишет. Параболаны схемалык түрдө чийебиз.



20-сүрөт

Бул барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү $\left[-3; 1\frac{1}{3}\right]$ көптүгү боло тургандыгы графиктен көрүнүп турат.

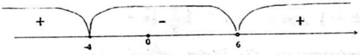
Жообу: $\left[-3; 1\frac{1}{3}\right]$.

19. Барабарсыздыктарды интервалдар методу менен чыгаргыла.

а) $(x+4)(x-6) > 0$ б) $(x+7)(x+2)(x-4) \leq 0$
в) $x^3 - 25x \geq 0$ г)$(x^2-4)(x-5) < 0$

Чыгаруу: а) $(x+4)(x-6) > 0$

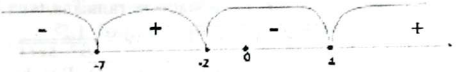
$y = (x+4)(x-6)$функциясынын нөлдөрү $x=-4$ жана $x=6$ сандары болот. Бул сандар сан огун $(-\infty; -4), (-4; 6)$ жана $(6; +\infty)$ аралыктарына бөлөт.



21-сүрөт

Жообу: $(-\infty; -4) \cup (6; +\infty)$

б) $(x+7)(x+2)(x-4) \leq 0$берилген туюнтманын нөлдөрү . –7; –2; 4 сандарын сан огунда белгилейбиз.



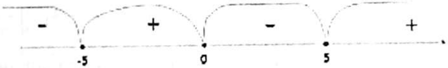
22-сүрөт

Бул сандар сан огун $(-\infty;\ -7], [-7; -2], [-2; 4]$ жана $[4; +\infty)$ аралыктарына бөлөт. Оң жактан $[4; +\infty)$ аралыгынан туюнтманын белгисин аныктайбыз. Бул аралыкта туюнтма оң мааниге ээ болот. Демек барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү $(-\infty; -7] \cup [-2; 4]$ аралыктарынын биригүүсү болот.

в) $x^3 - 25x \geq 0x^3 - 25x$ туюнтмасын көбөйтүүчүлөргө ажыратып алабыз.

$$x^3 - 25x \geq 0 \qquad x(x^2 - 25) \geq 0$$

$x(x+5)(x-5) \geq 0$ бул туюнтманын нөлдөрү 0; –5; 5 сандары болот.



23-сүрөт

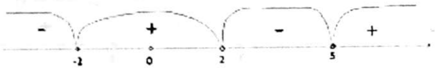
$(-\infty; -5], [-5; 0], [0; 5]$ жана $[5; +\infty)$ аралыктарына ээ болдук. Оң жактан $[5; +\infty)$ аралыгында туюнтманын белгисин аныктайбыз. Бул аралыкта туюнтма оң мааниге ээ болот.

Демек, барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү $[-5; 0] \cup [5; +\infty)$ көптүктөрүнүн биригүүсү болот.

Жообу: $[-5; 0] \cup [5; +\infty)$

г) $(x^2 - 4)(x - 5) < 0(x^2 - 4)(x - 5)$ туюнтмасын көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз.

$(x^2 - 4)(x - 5) = (x - 2)(x + 2)(x - 5)$ бул туюнтманын нөлдөрү –2; 2; 5 сандары болот жана алар сан огун $(-\infty; -2), (-2; 2), (2; 5)$ жана $(5; +\infty)$ аралыктарына бөлөт. $(5; +\infty)$ аралыгында туюнтма оң мааниге ээ болот.



24-сүрөт

Демек берилген барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү $(-\infty; -2) \cup (2; 5)$ көптүктөрүнүн биригүүсү болот.

Жообу: $(-\infty;\ -2) \cup (2; 5)$.

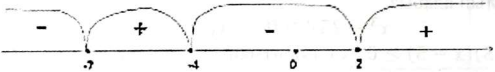
20. Функциянын аныкталуу областын тапкыла.

а) $y = \sqrt{(2x+8)(5-x)(x+7)}$; б) $y = \frac{5}{\sqrt{x^2-5x+4}}$.

Чыгаруу: а) $y = \sqrt{(2x+8)(5-x)(x+7)}$ Бул функция мааниге ээ болуш үчүн $(2x+8)(5-x)(x+7) \geq 0$ болуш керек. Бул барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү берилген функциянын аныкталуу областы болот.

Барабарсыздыкты чыгарабыз

$2(x+4)(x-5)(x+7) \leq 0$ деп алабыз. –4; 2 жана –7 сандары барабарсыздыкты түзгөн туюнтманын нөлдөрү болот. Бул сандарды сан огуна белгилейбиз.



25-сүрөт

Бул чекиттер сан огун $(-\infty; -7]$, $[-7; -4]$, $[-4; 2]$ жана $[2; +\infty)$ интервалдарына бөлөт.

Туюнтманын $[2; +\infty)$ интервалындагы белгисин аныктайбыз. Ал оң болот.

Демек, барабарсыздыктын чыгарылышы $(-\infty; -7] \cup [-4; -2]$ көптүктөрүнүн биригүүсү болот.

Жообу: Функциянын аныкталуу областы $(-\infty; -7] \cup [-4; -2]$көптүгү болот.

б) $y = \frac{5}{\sqrt{x^2-5x+4}}$; бул функциянын аныкталуу областын табуу үчүн $x^2 - 5x + 4 > 0$барабарсыздыгын чыгарабыз. Анын чыгарылыш көптүгү берилген функциянын аныкталуу областы болот.

$x^2 - 5x + 4 > 0$,

$(x-1)(x-4) > 0$.

1 жана 4 сандары туюнтманын нөлдөрү болот. Аларды сан огунда белгилейбиз.

26-сүрөт

$(-\infty; 1)$, $(1; 4)$ жана $(4; +\infty)$ интервалдарын алабыз, $(4; +\infty)$ интервалында туюнтма оң болот. Демек функциянын аныкталуу областы $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$ көптүгү болот.

II глава. Теңдемелер жана теңдемелер системасы
2.1. Бир өзгөрүлмөлүү теңдемелер

Оң жана сол жактары көп мүчөлөрдөн гана турган теңдемелер бүтүн теңдемелер деп аталат.

Мисалы: $5x^2 - 3x = 7x + 10$,

$$\frac{x^3+5}{4} - \frac{x-2}{2} = \frac{x^2-3}{3} + x.$$

n – даражадагы стандарттуу түрдө жазылган теңдеме:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$болот.

$a_0x + a_1 = 0$– биринчи даражадагы теңдеме;

$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ – экинчи даражадагы теңдеме;

$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$– үчүнчү даражадагы теңдеме.

Теңдеменин тамырларынын саны анын даражасына жараша болот. n –даражалуу теңдеме n ден көп эмес тамырга ээ болот.

1–2-даражадагы теңдемелерди чыгаруунун формулаларын силер билесиңер.

3–4-даражадагы теңдемелерди чыгаруунун да формуласы бар, бирок татаал.

Үчүнчү же андан жогорку даражадагы теңдемелер кээ бир ыкмалар менен же теңдемелерди түзгөн көп мүчөлөрдү көбөйтүүчүлөргө ажыратуу менен чыгарылат.

1-мисал. $ax^{2n} + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad n \geq 2.$

Бул үч мүчөлүү теңдеме $n = 2$ болгон учурда биквадраттык теңдеме болуп калат.

$x^n = y$ деп ала турган болсок, берилген теңдеме $ay^2 + by + c = 0$ квадраттык теңдемеге келтирилет.

$2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу: $x^2 = y$ деп белгилеп жаңы өзгөрмө кийиребиз, анда $2y^2 - 5y - 12 = 0$ квадраттык теңдемесине ээ болобуз.

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 25 + 96 = 121$$

$$y_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$$

$$y_1 = \frac{5 + 11}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$y_2 = \frac{5 - 11}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Демек, $x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} x^2 = -\frac{3}{2}$тамырга ээ болбойт

$x_1 = 2; \quad x_2 = -2.$

Жообу: $x_1 = 2; \quad x_2 = -2.$

2-мисал. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу:$x^3 - 4x^2 + x + 6 = x^3 - 3x^2 - x^2 + 3x - 2x + 6 =$

$$= (x^3 - 3x^2) - (x^2 - 3x) - 2(x - 3) =$$
$$= x^2(x - 3) - x(x - 3) - 2(x - 3) =$$
$$= (x - 3)(x^2 - x - 2)$$

Демек, берилген теңдемени төмөнкүдөй өзгөртүп жазып алууга болот.

$$(x - 3)(x^2 - x - 2) = 0$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$
$$x_1 = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ошентип бул теңдеменин үч тамырын таптык.

Жообу: $x_1 = 2, \; x_2 = -1, \; x_3 = 3.$

3-мисал. $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 5 = 0$теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу: Теңдеменин сол жагын көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз.

$$(x^5 + x^4) - (6x^3 + 6x^2) + (5x + 5) =$$
$$= x^4(x + 1) - 6x^2(x + 1) + 5(x + 1) =$$
$$= (x + 1)(x^4 - 6x^2 + 5)$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$биквадраттык теңдемесин чыгарабыз.

$x^2 = y$ деп алсак,

$y^2 - 6y + 5 = 0$теңдемесине ээ болобуз.

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$y_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$y_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$y_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Эми x тин маанилерин табабыз

$$x^2 = 5 \qquad\qquad x^2 = 1$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{5} \qquad\qquad x_{3/4} = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = \sqrt{5} \qquad\qquad x_3 = 1$$

$$x_2 = -\sqrt{5} \qquad\qquad x_4 = -1$$

Ошентип бул теңдеменин беш тамырын таптык

Жообу: $x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}, x_3 = 1, x_4 = -1, x_5 = -1.$

4-мисал. $(3x^2 - x + 1)(3x^2 - x + 3) = 15$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу: $3x^2 - x = y$ белгилөөсүн киргизип, берилген теңдемени өзгөртүп түзөбүз.

$$(y+1)(y+3) = 15$$

$$y^2 + 4y + 3 - 15 = 0$$

$y^2 + 4y - 12 = 0$ квадраттык теңдемесин чыгарабыз

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64$$

$$y_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

$y_1 = \frac{-4+8}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad y_2 = \frac{-4-8}{2} = \frac{-12}{2} = -6$

Демек,

$$3x^2 - x = 2$$

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) =$$

$$= 1 + 24 = 25$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$3x^2 - x = -6$$

$$3x^2 - x + 6 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 =$$

$$= 1 - 72 = -71$$

$D = -71 < 0$ демек бул теңдеме тамырларга ээ болбойт.

$$x_2 = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Жообу: $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{2}{3}$

5-мисал. $\sqrt{x^2-2x} = \sqrt{12-3x}$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу:

$(\sqrt{x^2-2x})^2 = (\sqrt{12-3x})^2$ Берилген теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз.

$x^2 - 2x = 12 - 3x,$
$x^2 + x - 12 = 0,$
$D = 1^2 - 4 \cdot (-12) = 49,$
$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2},$
$x_1 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3,$
$x_2 = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4,$

Жообу: $x_1 = 3;\ x_2 = -4.$

$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0\ \ a \neq 0 (1)$түрүндөгү теңдеме үчүнчү даражадагы симметриялуу теңдеме деп аталат.

$ax^3 + bx^2 + bx + a = (x+1)[(ax^2 + (b-a)x + a]$ (2) болгондуктан, ал x+1=0 же $ax^2 + (b-a)x + a = 0,$ түрүндөгү теңдемеге келтирет.

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$ (3)
$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0,$ (4) түрүндөгү теңдемелер төртүнчү даражадагы симметриялуу теңдемелер деп аталат.

Бул теңдемелердин эки жагын тең x^2кабөлүп, ал теңдемелерди төмөнкү теңдемелерге келтиребиз:

$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0;$ (5)
$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0.$ (6)

Бул теңдемелердеги $x + \frac{1}{x}$ти у аркылуу $x - \frac{1}{x}$ти z аркылуу белгилейбиз.

$x + \frac{1}{x} = y (7)$жана $x - \frac{1}{x} = z$ (8)

Жаңы өзгөрмөнү берилген теңдемелерге коюп, төмөнкү теңдемелерди алабыз.

$$a(y^2-2) + by + c = 0; \quad (9)$$
$$a(z^2+2) + bz + c = 0. \quad (10)$$

Бул теңдемелерди чыгарып yменен z тин маанисин таап, андан кийин берилген теңдеменин тамыры xти табабыз.

6-мисал. $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу: Бул үчүнчү даражадагы симметриялуу теңдемени чыгаруу үчүн (2)ни пайдаланып, теңдеменин сол жагын көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз.

анда $(x+1)(2x^2+x+2)=0$теңдемесине ээ болобуз.

$x+1=0$ Бул теңдемени чыгарып, $x=-1$ экенин табабыз

$2x^2+x+2=0$

$D = 1^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 1-16 = -15, \quad D<0$ анын тамырларын табабыз демек бул теңдеменин тамырлары жок.

Жообу: $x=-1$.

7-мисал. $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу: Бул 4-даражадагы симметриялуу теңдемени чыгаруу үчүн, теңдеменин эки жагын тең x^2ка бөлүп, (5) түрдөгү теңдемеге келтиребиз.

$$x^2+3x+4+3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

$$(x^2+\frac{1}{x^2})+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0,$$

(7) пайдаланып $x+\frac{1}{x}=y$ жаңы өзгөрмөнү киийребиз. (9)нун негизинде.

$(y^2-2)+3y+4=0,$

$y^2+3y+2=0,$ квадраттык теңдемесине ээ болобуз.

D$=3^2-4\cdot 2=9-8=1,$

$$y_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2},$$

$$y_1=\frac{-3+1}{2}=\frac{-2}{2}=-1, \qquad y_2=\frac{-3-1}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$x+\frac{1}{x}=-1$, жана $x+\frac{1}{x}=-2$.

$x^2+x+1=0 \qquad x^2+2x+1=0$

$D=1^2-4\cdot 1=1-4=-3<0; D=2^2-4\cdot 1=4-4=0.$

Демек бул теңдеме чыгарлышка ээ эмес. $x_{1/2}=\frac{-2}{2}=-1.$

Жообу: $x=-1$.

2.1. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

21. Теңдемени чыгаргыла.

а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ в) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

б) $x^4 + 36 = 13x^2$ г) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Чыгаруу: а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x^2 = y$ деп, жаңы өзгөрмө кийиребиз.

деп, жаңы өзгөрмө кийиребиз.

$$y^2 - 5y + 4 = 0, \qquad D = 25 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

$$y_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

$$y_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4; \qquad y_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Демек $x^2 = 4$ жана $x^2 = 1$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \qquad x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Жообу: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

б) $x^4 + 36 = 13x^2,$

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$ $x^2 = y$ деп жаңы өзгөрмө кийиребиз. Анда төмөнкү квадраттык теңдемеге ээ болобуз.

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

$$D = 169 - 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25$$

$$y_{1/2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}; \qquad y_1 = \frac{13+5}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$y_2 = \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$x^2 = 9, \qquad x^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2;$$

Жообу: $x_1 = 3;$ $x_2 = -3;$ $x_3 = 2;$ $x_4 = -2.$

в) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0,$ $y = x^4$ деп, жаңы өзгөрмө кийиребиз.

$y^2 - 17x + 16 = 0$ квадраттык теңдемесин алабыз.

$$D = 289 - 4 \cdot 16 = 289 - 64 = 225$$

$$y_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2}; \quad y_1 = \frac{17+15}{2} = \frac{32}{2} = 16,$$

$$y_2 = \frac{17-15}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

Демек, $x^4 = 16$, жана $x^4 = 1$.

$$x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2 \qquad x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1,$$

Жобуу: $x_1 = 2,\ x_2 = -2.\ \ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

г) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0,\ y = x^3$ деп, жаңы өзгөрмө кийирип: $y^2 - 7y - 8 = 0$ теңдемесин алабыз.

$$D = 49 - 4 \cdot (-8) = 49 + 32 = 81,$$

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2}; \ \ y_1 = \frac{16}{2} = 8.\ y_2 = \frac{-2}{2} = -1.$$

Демек, $x^3 = 8$,жана $x^3 = -1$,

$$x = \sqrt[3]{8}, \qquad x = \sqrt[3]{-1},$$

$$x = 2 \qquad x = -1.$$

Жообу: $x_1 = 2;\ x_2 = -1.$

22. Теңдемени чыгаргыла.

а) $3x^4 - 27x^2 = 2x^3 + 18x;$

б) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0;$

в) $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0;$

г) $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0.$

Чыгаруу: а) $3x^4 - 27x^2 = 2x^3 + 18x,$

$$3x^4 - 27x^2 - 2x^3 + 18x = 0,$$

$$3x^2(x^2 - 9) - 2x(x^2 - 9) = 0,$$

$$(x^2 - 9)(3x^2 - 2x) = 0,$$

$$(x - 3)(x + 3) \cdot x(3x - 2) = 0-$$

Демек, $x_1 = 3,\ x_2 = -3;\ \ x_3 = 0;\ \ x_4 = \frac{2}{3}.$

Жообу: $x_1 = 3,\ x_2 = -3;\ \ x_3 = 0;\ \ x_4 = \frac{2}{3}.$

б) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$, бул үч даражалуу симметриялуу теңдемени чыгаруу үчүн $ax^3 + bx^2 + bx + a = (x + 1)[ax^2 + +(b - a)x + a]$формуласын пайдаланабыз.

анда, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)(x^2+2x+1)$болот.

$$(x+1)(x^2+2x+1) = 0$$
$$x+1=0, \quad x=-1,$$
$$x^2+2x+1=0,$$
$$D = 4 - 4\cdot 1 = 0,$$
$$x_{1,2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Жообу: $x = -1$.

в) $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0,$

$$x^4(x+1) - 3x^2(x+1) - 4(x+1) = 0,$$
$$(x+1)(x^4 - 3x^2 - 4) = 0,$$
$$x+1=0, \quad x=-1,$$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, бул биквадраттык теңдемеге $x^2 = y$ жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз.

$y^2 - 3y - 4 = 0$ квадраттык теңдемесин алабыз

$$D = 9 + 4\cdot 4 = 25$$

$$y_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}; \quad y_1 = \frac{x+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad y_2 = \frac{3-5}{2} = -1.$$

Демек, $x^2 = 4$,же $x^2 = -1$тамырга ээ эмес.

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{4},$$
$$x_{1,2} = \pm 2,$$

Жообу: $x_1 = 2; \ x_2 = -2; \ x_3 = -1.$

г) $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ бул 4-даражадагы симметриялуу теңдемени чыгаруу үчүн, анын эки жагын тең x^2ка бөлүп төмөнкү теңдемени алабыз.

$2x^2 + 3x^3 - 5 + \frac{3}{x} + 2\cdot\frac{1}{x^2} = 0,$

$2x^2 + 2\cdot\frac{1}{x^2} + 3x + 3\cdot\frac{1}{x} - 5 = 0,$

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0.$

Теңдемедеги$x + \frac{1}{x}$ти y аркылуу белгилейбиз.

$x + \frac{1}{x} = y;$

(8) жана (10) теңдемелерди эске алсак анда $2(y^2 - 2) + 3y - 5 = 0$, теңдемесин алабыз.

$2y^2 - 4 + 3y - 5 = 0,$

$$2y^2 + 3y - 9 = 0,$$
$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 9 + 72 = 81,$$
$$y_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-3 \pm 9}{4};$$
$$y_1 = \frac{-3 + 9}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} y_2 = \frac{-3 - 9}{4} = -3.$$

Демек, төмөндөгүдөй теңдемелерге ээ болобуз

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$$
$$2x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 =$$
$$= 9 - 16 = -7 < 0$$

бул теңдеменин тамыры жок.

$$x + \frac{1}{x} = -3$$
$$x^2 + 3x + 1 = 0$$
$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$$
$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2};$$
$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

Жообу: $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

23. bнын кандай маанилеринде теңдеме эки тамырга ээ болот?

а) $2x^2 + 6x + b = 0$; б)$3x^2 + bx + 3 = 0$.

Чыгаруу: а) Берилген $2x^2 + 6x + b = 0$ теңдемеси эки тамырга ээ болуш үчүн, анын дискриминанты

$6^2 - 4 \cdot 2 \cdot b > 0$болуш керек.

$36 - 8b > 0$ барабарсыздыгын чыгарабыз

$$-8b > -36$$
$$b < (-36):(-8)$$
$$b < 4\frac{1}{2},$$

Демек, $b \in \left(-\infty;\ 4\frac{1}{2}\right)$ болгондо, берилген теңдеме эки тамырга ээ болот.

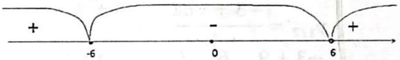
б)$3x^2 + bx + 3 = 0$.

Чыгаруу: Берилген теңдеменин дискриминантын табабыз. Теңдеме 2 тамырга ээ болуш үчүн

$b^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 > 0$ болуш керек.

$b^2 - 36 > 0$

$(b-6)(b+6) > 0$ бул барабарсыздыкты чыгаруу үчүн интервалдар методун колдонобуз.



27-сүрөт

Демек, $b \in (-\infty;\ -6) \cup\ (6;\ +\infty)$ болгондо, теңдеме эки тамырга ээ болот.

24. Жаңы өзгөрмөнү кийирүү менен, теңдемени чыгаргыла.

а) $(3x^2-1)^2 - 6(3x^2-1) + 8 = 0$;

б) $(2x^2-x)^2 - 8(2x^2-x) + 15 = 0$;

в) $(x^2-4x-1)(x^2-4x-4) - 4 = 0$;

г) $(x^2-2)(x^2+2) - 7(x^2-3) - 5 = 0$.

Чыгаруу: а) $3x^2 - 1 = y$ деп алабыз. Анда

$y^2 - 6y + 8 = 0$ теңдемесине ээ болобуз.

$$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$$

$$y_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2};$$

$y_1 = \frac{6+2}{2} = 4;\ y_2 = \frac{6-2}{2} = 2.$

Демек, $3x^2 - 1 = 4$ жана $3x^2 - 1 = 2$

$$3x^2 = 5 \qquad 3x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{5}{3} \qquad x^2 = \frac{3}{3} = 1$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \qquad x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_3 = 1;\ x_4 = -1$$

$x_1 = \sqrt{\frac{5}{3}};\ x_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$

Жообу: $x_1 = \sqrt{\frac{5}{3}};\ x_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}};\quad x_3 = 1;\ x_4 = -1.$

б) $(2x^2-x)^2 - 8(2x^2-x) + 15 = 0$;

Чыгаруу: $2x^2 - x = t$ жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз.

$t^2 - 8t + 15 = 0$ квадраттык теңдемесин алабыз.

$$D = 64 - 4 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

$$t_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2};$$

$t_1 = \frac{8+2}{2} = 5;\ t_2 = \frac{8-2}{2} = 3.$

Демек, $2x^2 - x = 5$ жана $2x^2 - x = 3$ теңдемесин алабыз.

$2x^2 - x - 5 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 41$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{4};$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{41}}{4};\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{41}}{4}.$$

$2x^2 - x - 3 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25$

$$x_{3/4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4};$$

$x_3 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2};\ x_4 = \frac{1-5}{4} = -1$

Жообу: $x_1 = \frac{1+\sqrt{41}}{4};\ x_2 = \frac{1-\sqrt{41}}{4};\ x_3 = \frac{3}{2};\ x_4 = -1.$

в) $(x^2 - 4x - 1)(x^2 - 4x - 4) - 4 = 0;$

Чыгаруу: $(x^2 - 4x - 1)(x^2 - 4x - 1 - 3) - 4 = 0;$

$x^2 - 4x - 1 = y$ белгилөөсүн кийиребиз, анда

$y(y - 3) - 4 = 0$ теңдемесин алабыз.

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$$

$$y_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2};$$

$y_1 = \frac{3+5}{2} = 4;\ y_2 = \frac{3-5}{2} = -1.$

Демек, $x^2 - 4x - 1 = 4$ жана $x^2 - 4x - 1 = -1$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2};$$

$x_1 = \frac{4+6}{2} = 5;\ x_2 = \frac{4-6}{2} = -1.$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x_3 = 0;\quad x - 4 = 0$

$x_4 = 4$

Жообу: $x_1 = 5;\ x_2 = -1;\ x_3 = 0;\ x_4 = 4.$

г) $(x^2 - 2)(x^2 + 2) - 7(x^2 - 3) - 5 = 0.$ Кашааларды ачабыз.

$$x^4 - 4 - 7x^2 + 21 - 5 = 0$$

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

$x^2 = y$ белгилөөсүн кийирип $y^2 - 7y + 12 = 0$ квадраттык теңдемесин алабыз.

$$D = 49 - 4 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

$$y_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2};$$

$y_1 = \frac{7+1}{2} = 4;$ $y_2 = \frac{7-1}{2} = 3.$

Демек, $x^2 = 4$ жана $x^2 = 3$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{4};$ $x_{3/4} = \pm\sqrt{3};$

$x_1 = 2;$ $x_2 = -2.$ $x_3 = \sqrt{3};$ $x_4 = -\sqrt{3}$

Жообу: $x_1 = 2;$ $x_2 = -2;$ $x_3 = \sqrt{3};$ $x_4 = -\sqrt{3}$

2.2. Сызыктуу теңдемени кармаган система

Сызыктуу теңдемени кармаган системаны чыгаруу үчүн:

1) Сызыктуу теңдемедеги бир өзгөрмөнү экинчи өзгөрмө аркылуу туюнтабыз;

2) табылган туюнтманы сызыктуу эмес теңдемеге коюп, бир өзгөрүлмөлүү теңдеме алабыз;

3) алынган теңдемени чыгарабыз;

4) экинчи өзгөрмөнүн маанисин табабыз.

1-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 3y = -3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Экинчи теңдемеден y ти x аркылуу туюнтуп алабыз

$$2x + y = 5$$

$y = 5 - 2x$ туюнтмасын y тин ордуна 1-теңдемеге коебуз.

$$x^2 - 5x(5 - 2x) + 3(5 - 2x) = -3$$

$$x^2 - 25x + 10x^2 + 15 - 6x + 3 = 0$$

$$11x^2 - 31x + 18 = 0$$

$$D = 31^2 - 4 \cdot 11 \cdot 18 = 961 - 792 = 169$$

$$x_{1/2} = \frac{31 \pm \sqrt{169}}{22} = \frac{31 \pm 13}{22};$$

$$x_1 = \frac{31+13}{22} = 2; \quad x_2 = \frac{31-13}{22} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}.$$

Демек, $y_1 = 5 - 2 \cdot 2 = 1;$

$$y_2 = 5 - 2 \cdot \frac{9}{11} = 5 - \frac{18}{11} = 5 - 1\frac{7}{11} = 3\frac{4}{11}$$

Жообу: $x_1 = 2;$ $x_2 = \frac{9}{11};$ $y_1 = 1;$ $y_2 = 3\frac{4}{11}.$

2.3. Бир тектүү теңдемени кармаган система

$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$түрүндө берилген теңдеме, бир тектүү теңдеме деп аталат.

2-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

Чыгаруу: 1-теңдемени y^2ка бөлүп, төмөнкү теңдемени алабыз. $2\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 3 = 0$ $t = \frac{x}{y}$ белгилөөсүн кийирип, төмөнкүдөй квадраттык теңдемени алабыз

$$2t^2 - t - 3 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$$

$$t_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4};$$

$$t_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2},\ t_2 = \frac{1-5}{4} = -1.$$

Демек, $\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}y$ муну экинчи теңдемеге коюп

$$\frac{9}{4}y^2 + y^2 = 13$$

$$9y^2 + 4y^2 = 52$$

$$13y^2 = 52$$

$$y^2 = 52:13$$

$$y^2 = 4$$

$$y_{1/2} = \pm 2$$

Мындан $x_1 = 3$; $x_2 = -3$ келип чыгат.

$$\frac{x}{y} = -1 \Rightarrow x = -y$$

$$(-y)^2 + y^2 = 13$$

$$2y^2 = 13$$

$$y^2 = \frac{13}{2}$$

$$y_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{13}{2}} y_4 = -\sqrt{\frac{13}{2}}$$

Мындан $x_3 = -\sqrt{\frac{13}{2}}$; $x_4 = \sqrt{\frac{13}{2}}$ келип чыгат.

Жообу: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = -\sqrt{\frac{13}{2}}$; $x_4 = \sqrt{\frac{13}{2}}$.

$y_1 = 2$; $y_2 = -2$; $y_3 = \sqrt{\frac{13}{2}}$;$y_4 = -\sqrt{\frac{13}{2}}$.

$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy - c_1y^2 = d_1 d_1 \neq 0 \\ a_2x^2 + b_2xy - c_2y^2 = d_2 d_2 \neq 0 \end{cases}$ теңдемелер системасын бир тектүү теңдемени кармаган системага келтирип чыгарабыз. Ал үчүн системанын биринчи теңдемесин d_2ге көбөйтүп, ал эми системанын экинчи теңдемесин $(-d_1)$ге көбөйтүп, алынган теңдемелерди кошуп, бир тектүү теңдеме алабыз.

3-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 1 \quad d_2 = -2 \\ 2x^2 - 5y^2 = -2 \qquad -d_1 = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ көбөйтөбүз

$\begin{cases} -2x^2 + 4xy - 2y^2 = -2 \\ \quad -2x^2 + 5y^2 = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$Теңдемелерди мүчөлөп кошобуз.

$-4x^2 + 4xy + 3y^2 = 0$ (-1)ге көбөйтөбүз

$4x^2 - 4xy - 3y^2 = 0$ y^2ка бөлөбүз

$4\frac{x^2}{y^2} - 4\frac{x}{y} - 3 = 0$ $t = \frac{x}{y}$ жаңы өзгөрмө киийребиз

$$4t^2 - 4t - 3 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 16 + 48 = 64$$

$$t_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8};$$

$t_1 = \frac{4+8}{8} = \frac{3}{2}$; $t_2 = \frac{4-8}{8} = -\frac{1}{2}$.

$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, $\qquad \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{3}{2}y$, $\qquad x = -\frac{1}{2}y$ буларды системанын экинчи теңдемесине коюп, төмөнкү теңдемелерди алабыз.

$$2\left(\frac{3}{2}y\right)^2 - 5y^2 = -2 \qquad\qquad 2\left(-\frac{1}{2}y\right)^2 - 5y^2 = -2$$

$$4\frac{1}{2}y^2 - 5y^2 = -2$$
$$-\frac{1}{2}y^2 = -2$$
$$y^2 = 4$$
$$y_{1/2} = \pm 2$$
$$x_1 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3;$$
$$x_2 = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3$$

$$\frac{1}{2}y^2 - 5y^2 = -2$$
$$4\frac{1}{2}y^2 = -2$$
$$y^2 = (-2) : \left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$y^2 = \frac{4}{9}$$
$$y_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$y_3 = \frac{2}{3}; \quad y_4 = -\frac{2}{3}$$
$$x_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3};$$
$$x_4 = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Жообу: (3;2), (–3;–2), $\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

2.4. Симметриялуу теңдемелер системасы

Теңдемелер системасындагы өзгөрмөлөр x менен y тин ордун алмаштырсак да теңдемелер өзгөрбөсө, анда ал система симметриялуу теңдемелер системасы деп аталат. Мындай системаларды чыгаруу үчүн жаңы u жана v өзгөрмөлөрүн төмөнкү формулалардын жардамы менен кийиребиз.

$$u = x + y$$
$$v = x \cdot y$$

Мында төмөнкү барабардыктарды колдонгон ыңгайлуу болот.

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv.$$
$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 =$$
$$= [(x + y)^2 - 2xy]^2 - -2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2.$$

4-мисал: Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases} 2(x + y) - 6 = x \cdot y \\ x^2 + y^2 - 12 = 5 \end{cases}$$

Чыгаруу: $u = x + y, \quad v = x \cdot y$

жана $u^2 - 2v = x^2 + y^2$ жаңы өзгөрмөлөрүн кийиребиз.

$\begin{cases} 2u - 6 = v \\ u^2 - 2v - 12 = 5 \end{cases}$ теңдемелер системасына ээ болобуз.

Системанын 1-теңдемесинде $v = 2u - 6$ экендиги көрүнүп турат. Аны экинчи теңдемеге v нын ордуна коёбуз.

$$u^2 - 2(2u - 6) - 12 = 5$$
$$u^2 - 4u + 12 - 12 - 5 = 0$$

$u^2 - 4u - 5 = 0$ квадраттык теңдемесин албыз. $D = 16 - 4 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$

$$u_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}; \quad u_1 = \frac{4+6}{2} = 5 \quad u_2 = \frac{4-6}{2} = -1$$

$v = 2u - 6$ болгондуктан u нун маанисин ага коюп, v нын маанилерин табабыз.

$$v_1 = 2 \cdot 5 - 6 = 10 - 6 = 4; \quad v_2 = 2 \cdot (-1) - 6 = -2 - 6 = -8$$

$\begin{cases} x + y = u \\ x \cdot y = v \end{cases}$ бул теңдемелер системасына u менен v нын маанилерин коюп, белгиленген системага тең күчтүү болгон

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$ жана $\begin{cases} x + y = -1 \\ x \cdot y = -8 \end{cases}$ теңдемелер системаларын алабыз. $y = 5 - x y_1 = 5 - 4 = 1$

$$x(5 - x) = 4 \qquad y_2 = 5 - 1 = 4$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1$$

$\begin{cases} x + y = -1 \\ x \cdot y = -8 \end{cases}$ системадагы 1-теңдемедеги y ти x аркылуу туюнтабыз. Аны экинчи теңдемеге коюп, квадраттык теңдемени алабыз.

$$y = -1 - x$$
$$x(-1 - x) = -8$$
$$x^2 + x - 8 = 0,$$

$D = 1 - 4 \cdot (-8) = 1 + 32 = 33.$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}, \qquad x_1 = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2};$$

$y = -1 - x$ формуласына x тин маанисин коюп y тин маанилерин табабыз.

$$y_1 = -1 - \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} = \frac{-2 + 1 - \sqrt{33}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2};$$

$$y_2 = -1 - \frac{-1-\sqrt{33}}{2} = \frac{-2+1+\sqrt{33}}{2} = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}.$$

Жообу: (4;1), (1;4), $\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{2}; \frac{-1-\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{2}; \frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right)$.

2.2.–2.4. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

25. Теңдемелер системасынын ордуна коюу жолу менен чыгаргыла.

а) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2-y=7 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-6y=3 \\ 3x-y=8 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+2y=6 \\ x-y=1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2-y^2=-1 \\ x+y=1 \end{cases}$

Чыгаруу:

а) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2-y=7 \end{cases}$

y ти x аркылуу туюнтуп алабыз.

$$y=5-x$$
$$x^2-(5-x)=7$$
$$x^2-5+x-7=0$$
$$x^2+x-12=0$$
$$D=1-4\cdot(-12)=49$$
$$x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}$$

$x_1=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3,\quad x_2=\frac{-1-7}{2}=\frac{-8}{2}=-4$

$y_1=5-3=2,\quad y_2=5-(-4)=9$

Жообу: (3;2); (–4;9)

б) $\begin{cases} x^2+2y=6 \\ x-y=1 \end{cases}$

x ти уаркылуу туюнтуп алабыз.

$$x=1+y$$
$$(1+y)^2+2y=6$$
$$1+2y+y^2+2y-6=0$$
$$y^2+4y-5=0$$
$$D=16-4\cdot(-5)=16+20=36$$
$$y_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2}$$

$y_1=\frac{-4+6}{2}=\frac{2}{2}=1,\quad y_2=\frac{-4-6}{2}=\frac{-10}{2}=-5$

$x_1=1+1=2,\quad x_2=1+(-5)=-4$

Жообу: (2;1); (–4;–5)

в) $\begin{cases} x^2 - 6y = 3 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$

y ти x аркылуу туюнтуп алабыз.

$$y = 3x - 8$$

$$x^2 - 6(3x - 8) = 3$$

$$x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$D = 324 - 4 \cdot 45 = 144$$

$$x_{1/2} = \frac{18 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{18 \pm 12}{2}$$

$x_1 = \frac{18+12}{2} = \frac{30}{2} = 15,$ $\qquad x_2 = \frac{18-12}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$y_1 = 3 \cdot 15 - 8 = 45 - 8 = 37,$ $\qquad y_2 = 3 \cdot 3 - 8 = 1$

Жообу: (15;37), (3;1).

г) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

y ти x аркылуу туюнтуп алабыз.

$$y = 1 - x.$$

$$2x^2 - (1 - x)^2 = -1,$$

$$2x^2 - (1 + 2x + x^2) = -1,$$

$$2x^2 - 1 + 2x - x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + 2x = 0,$$

$$x(x + 2) = 0,$$

$$x_1 = 0, y_1 = 1 - 0 = 1,$$

$$x_2 = -2. y_2 = 1 - (-2) = 3.$$

Жообу: (0;1), (–2;3).

26. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

а) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ $\qquad$ г) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 8y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 3xy - 10y^2 = 0 \\ x^2 - 7xy + 3y^2 = -7 \end{cases}$ $\qquad$ д) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 9y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5 \end{cases}$ $\qquad$ е) $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}$

Чыгаруу: а) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ бул теңдеме бир тектүү теңдемени кармаган система. 1-теңдемени x^2ка бөлүп, $t = \frac{x}{y}$ жаңы өзгөрмөнү кийиребиз.

$$2\frac{x^2}{y^2} - 5\cdot\frac{x}{y} + 2 = 0,$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0, \quad D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9,$$

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}; \quad t_1 = \frac{5+3}{4} = 2, \quad t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Демек, $t = \frac{x}{y}$, $\frac{x}{y} = 2$, $x = 2y$; $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}y$,

Бул туюнтмаларды системанын экинчи теңдемесине коюп, төмөнкү теңдемелерди алабыз.

$$\begin{aligned} (2y)^2 + y^2 &= 5 \\ 4y^2 + y^2 &= 5, \\ 5y^2 &= 5, \\ y^2 &= 1, \\ y_1 &= 1, \\ y_2 &= -1, \\ x_1 &= 2\cdot 1 = 2, \\ x_2 &= 2\cdot(-1) = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{2}y)^2 + y^2 &= 5 \\ \frac{1}{2}y^2 + y^2 &= 5, \\ \frac{5}{4}y^2 &= 5, \\ y^2 &= 5 : \frac{5}{4}, \\ y^2 &= 4, \\ y_3 = 2, \quad y_4 &= -2; \\ x_3 &= \frac{1}{2}\cdot 2 = 1, \\ x_4 &= \frac{1}{2}(-2) = -1. \end{aligned}$$

Жообу: (2;1), (–2;–1), (1;2), (–1;–2).

б) **Чыгаруу:** $\begin{cases} x^2 + 3xy - 10y^2 = 0 \\ x^2 - 7xy + 3y^2 = -7 \end{cases}$. бул теңдемелер системасында 1-теңдеме бир тектүү теңдеме. Аны y^2ка бөлүп, $t = \frac{x}{y}$ белгисизине карата квадраттык теңдемени алабыз.

$$\frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} - 10 = 0 \quad \frac{x}{y} = t$$

$$t^2+3t-10=0, \qquad D=9-4\cdot(-10)=49$$

$$t_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}; \;\; t_1=\frac{-3+7}{2}=2,$$

$$t_2=\frac{-3-7}{2}=-5.$$

Системасынын экинчи теңдесине $\frac{x}{y}=2$, $x=2y$, же $\frac{x}{y}=-5$, $x=-5y$ути коюп, төмөнкү теңдемелерди алабыз.

$$(2y)^2-7y\cdot(2y)+3y^2=-7(-5y)^2-7y\cdot(-5y)+3y^2=-7$$

$$4y^2-14y^2+3y^2=-7{,}25y^2+35y^2+3y^2=-7$$

$-7y^2=-7{,}63y^2=-7$,

$y^2=1$. Бул теңдеме чыгарылышка ээ

$y=\pm\sqrt{1}$, $y_1=1$; $y_2=-1$. болбойт.

$x_1=2\cdot 1=2$; $x_2=2\cdot(-1)=-2$.

Жообу: (2;1), (–2;–1).

в) **Чыгаруу:** $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ 2x^2-xy-y^2=5 \end{cases}$ Бул системаны бир тектүү теңдемени кармаган системага келтиребиз. Ал үчүн, 1-теңдемени 5ке 2-теңдемени – 3кө көбөйтүп алынган теңдемелерди кошобуз.

$$5x^2-5xy+5y^2=15$$

$$-6x^2+3xy+3y^2=-15$$

$-x^2-2xy+8y^2=0$, y^2ка бөлөбүз

$\frac{x^2}{y^2}+2\frac{x}{y}-8=0$, $\frac{x}{y}=t$ өзгөрмөсүнүн кийиребиз.

$t^2+2t-8=0, D=4-4\cdot(-8)=36$,

$t_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm6}{2}$; $t_1=\frac{-2+6}{2}=2$, $t_2=\frac{-2-6}{2}=-4$.

$\frac{x}{y}=2$, $x=2y$,же $\frac{x}{y}=-4$, $x=-4y$.

Берилген система төмөнкү эки системага тең күчтүү болот.

$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ x=2y \end{cases}$ жана $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ x=-4y, \end{cases}$

$$4y^2-2y^2+y^2=316y^2+4y^2+y^2=3,$$

$3y^2=3$, $21y^2=3$,

$$y^2 = 1, y^2 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}, \qquad y_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{1}{7}}$$

$y_1 = 1,\ y_2 = -1, y_3 = \sqrt{\frac{1}{7}},\ y_4 = -\sqrt{\frac{1}{7}}$

$x_1 = 2 \cdot 1 = 2,\ y_2 = 2(-1) = -2. x_3 = -4\sqrt{\frac{1}{7}},\ x_4 = 4\sqrt{\frac{1}{7}}$

Жообу: $(2; 1),\ (-2; -1),\ \left(-4\sqrt{\frac{1}{7}};\ \sqrt{\frac{1}{7}}\right),\ \left(4\sqrt{\frac{1}{7}};\ -\sqrt{\frac{1}{7}}\right).$

г) **Чыгаруу:** $\begin{cases} x^2 - 5xy + 8y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ системадагы 1-теңдемени 3 кө, 2-теңдемени – 2 ге көбөйтүп, алынган теңдемелерди кошобуз.

$$\begin{array}{l} 3x^2 - 15xy + 24y^2 = 6 \\ + \\ -2x^2 + 2y^2 = -6 \\ x^2 - 15xy + 26y^2 = 0 \end{array}$$

алынган бир тектүү теңдемени y^2ка бөлөбүз.

$$t = \frac{x}{y}$$

$$\frac{x^2}{y^2} - 15\frac{x}{y} + 26 = 0$$

$$t^2 - 15t + 26 = 0, \qquad D = 225 - 4 \cdot 26 = 121$$

$$t_{1/2} = \frac{15 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{15 \pm 11}{2}; \qquad t_1 = \frac{15 + 11}{2} = 13; \quad t_2 = \frac{15 - 11}{2} = 2.$$

$$\frac{x}{y} = 13 \quad x = 13y, \qquad \text{жана} \quad \frac{x}{y} = 2, \quad x = 2y$$

Берилген системага төмөнкү эки система тең күчтүү болот.

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x = 13y \end{cases}$ жана $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x = 2y \end{cases}$

$$(13y)^2 - y^2 = 3 \qquad (2y)^2 - y^2 = 3$$

$$169y^2 - y^2 = 3 \qquad 4y^2 - y^2 = 3$$

$$168y^2 = 3 \qquad 3y^2 = 3$$

$$y^2 = \frac{1}{56} \qquad y^2 = 1$$

$$y_{3/4} = \pm\sqrt{1}$$

$$y_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{56}}$$

$$y_3 = 1, \quad y_4 = -1$$
$$x_3 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$x_4 = 2 \cdot (-1) = -2$$

$y_1 = \sqrt{\frac{1}{56}},\ y_2 = -\sqrt{\frac{1}{56}},$

$x_1 = 13\sqrt{\frac{1}{56}}, x_2 = -13\sqrt{\frac{1}{56}}$

Жообу: $\left(13\sqrt{\frac{1}{56}}; \sqrt{\frac{1}{56}}\right)$; $\left(-13\sqrt{\frac{1}{56}}; -\sqrt{\frac{1}{56}}\right)$; $(2; 1)$; $(-2; -1)$.

д) **Чыгаруу:** $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 9y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$ системадагы 1-теңдеме бир тектүү теңдеме болгондуктан, аны y^2ка бөлүп, $t = \frac{x}{y}$ жаңы өзгөрмөсүн кийирип, төмөнкү квадраттык теңдемени алабыз.

$$\frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} - 9 = 0$$
$$2t^2 + 3t - 9 = 0,$$
$$D = 9 + 4 \cdot 18 = 81$$
$$t_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-3 \pm 9}{4};$$
$$t_1 = \frac{-3+9}{4} = \frac{3}{2};\ t_2 = \frac{-3-9}{4} = -3.$$

Демек, $\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}y$;жана $\frac{x}{y} = -3 \Rightarrow x = -3y$

Берилген система төмөнкү эки теңдемелер системасына тең күчтүү болот.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$$
$$\frac{9}{4}y^2 - 3y^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = 4$$
$$y_{1/2} = \pm\sqrt{4}$$

$y_1 = 2,\ y_2 = -2,$

$x_1 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3,$

$$\begin{cases} x = -3y \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$$
$$9y^2 - 6y^2 + y^2 = 1$$
$$4y^2 = 1$$
$$y^2 = \frac{1}{4}$$
$$y_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$y_3 = \frac{1}{2}, \quad y_4 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3 \qquad x_3 = -3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_4 = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

Жообу: $(3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$, $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, $(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$.

e) **Чыгаруу:** $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}$ системасындагы 1-теңдемени 4кө, 2-теңдемени – 2ге көбөйтүп, алынган теңдемелерди кошобуз.

$$4x^2 - 8xy - 4y^2 = 8$$

$$+$$

$$\underline{\qquad -2xy - 2y^2 = -8}$$

$4x^2 - 10xy - 6y^2 = 0$ $2y^2$ка бөлөбүз

$2\frac{x^2}{y^2} - 5\frac{x}{y} - 3 = 0$ $t = \frac{x}{y}$ жаңы өзгөрмөсүн киийрип, төмөнкү квадраттык теңдемени алабыз.

$$2t^2 - 5t - 3 = 0,$$

$$D = 25 + 4 \cdot 6 = 49$$

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4};$$

$$t_1 = \frac{5+7}{4} = 3;\ \ t_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Демек, $\frac{x}{y} = 3 \Rightarrow x = 3y$; жана $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y$

Берилген система төмөнкү эки теңдемелер системасына тең күчтүү болот.

$$\begin{cases} x = 3y \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$3y \cdot y + y^2 = 4$$

$$4y^2 = 4$$

$$y_{1/2} = \pm\sqrt{1}$$

$y_1 = 1,\ y_2 = -1,$

$x_1 = 3 \cdot 1 = 3,$

$$x_2 = 3 \cdot (-1) = -3$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}y \cdot y + y^2 = 4$$

$$\frac{1}{2}y^2 = 4$$

$$y^2 = 8$$

$$y_{3/4} = \pm\sqrt{8}$$

$$y_3 = \sqrt{8}, \quad y_4 = -\sqrt{8}$$
$$x_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{8}$$
$$x_4 == -\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{8}$$

Жообу: $(3;\ 1),\ (-3;\ -1), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{8}; \sqrt{8}\right), (\frac{1}{2}\sqrt{8}; -\sqrt{8})$.

27. Төмөнкү симметриялуу теңдемелер системасын чыгаргыла.

а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - xy + 3y = 9 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = 2 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = 5 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$

Чыгаруу: а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$ Бул симметриялуу теңдемелер системасынын чыгаруу үчүн $x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$,
$$x + y = u$$
$$xy = v$$
формулаларын пайдаланабыз.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ xy(x+y) = 30, \end{cases} \begin{cases} u^3 - 3uv = 35 \\ v \cdot u = 30, \end{cases} \begin{cases} u^3 - 3uv = 35 \\ v = \dfrac{30}{u}, \end{cases}$$
$$u^3 - 3u\cdot\frac{30}{u} = 35$$
$$u^3 - 90 = 35$$
$$u^3 = 125$$
$u = 5,\ v = \frac{30}{5} = 6$. Демек, берилген система төмөнкүсистемага тең күчтүү болот.
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x\cdot y = 6, \end{cases} \begin{cases} x = 5 - y \\ x \cdot y = 6, \end{cases} \quad y(5-y) = 6$$
$$5y - y^2 - 6 = 0$$
$$y^2 - 5y + 6 = 0$$
$$y_1 = 3; \quad y_2 = 2.$$
$$x_1 = 5 - 3 = 2,\ x_2 = 5 - 2 = 3$$
Жообу: (2;3), (3;2).

б) **Чыгаруу:** $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ xy = 2. \end{cases}$

$x^4 + y^4 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2$ жана $xy = v$ формулаларын колдонобуз.

$$\begin{cases} (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = 17, \\ v = 2, \end{cases} \quad (u^2 - 2 \cdot 2)^2 - 2 \cdot 2^2 = 17,$$

$$u^4 - 8u^2 + 16 - 8 - 17 = 0$$

$$u^4 - 8u^2 - 9 = 0$$

$u^2 = t$ жаңы өзгөрмөсүн кийиребиз.

$$t^2 - 8t - 9 = 0, \quad D = 64 + 36 = 100$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}, \quad t_1 = 9; \quad t_2 = -1.$$

Демек, $v^2 = 9, \quad u_1 = 3, \quad u_2 = -3.$

Берилген теңдемелер системасы төмөнкү эки системага тең күчтүү болот.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$x = 3 - y \qquad x = -3 - y$$

$$y(3 - y) = 2 \qquad y(-3 - y) = 2$$

$$y^2 - 3x + 2 = 0 \qquad y^2 + 3y + 2 = 0$$

$$y_1 = 2; \quad y_2 = 1 \qquad y_3 = -1; \quad y_4 = -2$$

$$x_1 = 3 - 2 = 1 \qquad x_2 = 3 - 1 = 2$$

$$x_3 = -3 - (-1) = -2 \qquad x_4 = -3 - (-2) = -1$$

Жообу: (1; 2), (2; 1), (–2; –1), (–1; –2).

в) **Чыгаруу:** $\begin{cases} 3x - xy + 3y = 9 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v, \quad x + y = u \quad \text{жана } xy = v$$

формулаларын колдонобуз.

$$\begin{cases} 3(x + y) - xy = 9 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases} \begin{cases} 3u - v = 9 \\ u^2 - 2v - 2v = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 3u - 9 \\ u^2 - 4v = 1 \end{cases} \quad u^2 - 4(3u - 9) = 1$$

$$u^2 - 12u + 35 = 0 \quad D = 144 - 4 \cdot 35 = 4$$

$u_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{12 \pm 2}{2}, \quad u_1 = 7, \quad u_2 = 5.$

Демек, $v_1 = 3u - 9 = 3 \cdot 7 - 9 = 13,\ u_2 = 3 \cdot 5 - 9 = 6$. Берилген система төмөнкү эки системага тең күчтүү болот.

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$ жана $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 13 \end{cases}$. бул теңдеме чыгарылышка ээ болбойт.

$x = 5 - y$

$y(5 - y) = 6$

$y^2 - 5y + 6 = 0.$

$$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1.$$

$$y_{1_2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad y_1 = 3; \quad y_2 = 2.$$

$$x_1 = 5 - 3 = 2; \quad x_2 = 5 - 2 = 3.$$

Жообу: (2; 3), (3;2).

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = 5 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v \ \ x + y = u \quad \text{жана} \quad x \cdot y = v$$

формулаларын колдонобуз.

$$\begin{cases} u^2 - 2v - 3v = 5 \\ u - v = 1 \end{cases} \begin{cases} u^2 - 5v = 5 \\ v = u - 1 \end{cases}$$

$$u^2 - 5(u - 1) = 5$$

$$u^2 - 5u + 5 - 5 = 0$$

$$u^2 - 5u = 0$$

$$u(u - 5) = 0$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 - 5 = 0, \quad u_2 = 5.$$

Демек, $v_1 = 0 - 1 = -1, \quad v_2 = 5 - 1 = 4$

Берилген система төмөнкү эки системага тең күчтүү болот.

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$ жана $\begin{cases} x + y = 0 \\ x \cdot y = -1 \end{cases}$ $x = 5 - yx = -y$

$y(5 - y) = 4$ $\quad\quad -y \cdot y = -1$

$y^2 - 5y + 4 = 0,$ $\quad\quad -y^2 = -1$

$D = 25 - 16 = 9$ $\quad\quad y^2 = 1$

$$y_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} y_3 = 1; \quad y_2 = -1$$

$y_1 = 4; \quad y_2 = 1$ $\quad\quad x_3 = -1; \quad x_4 = 1$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 4$

Жообу: (1;4), (4;1), (–1;1), (1;–1).

2.5. Теңдемелердин жана теңдемелер системасынын жардамы менен маселелер чыгаруу

1-маселе. *A* шаарынан, аралыгы 450 км болгон *B* шаарын көздөй, бир эле убакта эки жеңил машина жөнөдү. Алардын биринин ылдамдыгы экинчисинин ылдамдыгынан 10 км/саатка чоң. Эгерде экинчи машина биринчи машинага караганда *B* шаарына $\frac{5}{8}$ саат кеч келген болсо, машиналардын ылдамдыктарын тапкыла.

Чыгаруу: Биринчи машинанын ылдамдыгын x км/саат болсун, анда экинчи машинанын ылдамдыгы $x - 10$ км/саат болот.

$\frac{450}{x}$ – бирнчи машина сарптаган убакыт

$\frac{450}{x-10}$ – экинчи машина сарптаган убакыт.

Маселенин шарты боюнча төмөнкүдөй теңдеме түзөбүз.

$$\frac{450}{x-10} - \frac{450}{x} = \frac{5}{8}$$

$$3600x - 3600(x-10) = 5x \cdot (x-10)$$

$$3600x - 3600x - 36000 = 5x^2 - 50x$$

$$5x^2 - 50x - 36000 = 0$$

$$x^2 - 10x - 7200 = 0$$

$$D = 100 + 4 \cdot 7200 = 28900$$

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{28900}}{2} = \frac{10 \pm 170}{2}$$

$$x_1 = \frac{10+170}{2} = 90$$

$$x_2 = \frac{10-170}{2} = -80.$$

$$90 - 10 = 80.$$

Жообу: 90 км/саат, 80 км/саат.

2-маселе. Ромбдун диоганалдары менен анын бир жагы аркылуу түзүлгөн бурчтар 2:3 сыяктуу катышат. Бул бурчтарды тапкыла.

Чыгаруу: Ал бурчтарды $\propto$ жана β менен белгилейли. Ромбдун диоганалдары өз ара перпендикуляр болот.

Ошондуктан $\propto + \beta = 90^{\circ}$

Маселенин шарты боюнча $\propto : \beta = 2:3$.

Демек, төмөнкүдөй теңдемелер системасын түзүүгө болот.

$$\begin{cases} \propto + \beta = 90 \\ \dfrac{\propto}{\beta} = \dfrac{2}{3}, \end{cases} \begin{cases} \propto + \beta = 90 \\ \propto = \dfrac{2}{3}\beta, \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}\beta + \beta = 90$$

$$\frac{5}{3}\beta = 90$$

$$\beta = 90 : \frac{5}{3} = 90 \cdot \frac{3}{5} = 54$$

$$\propto = 90 - \beta = 90 - 54 = 36.$$

Жообу: 36° жана 54°.

3-маселе Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотинузасы 13 см ге, ал эми периметри 30 см ге барабар. Анын катеттерин тапкыла.

Чыгаруу: Катеттер х см жана у см болсун. Анда, маселенин шарты боюнча x+y+13=30

Пифагордун теоремасы боюнча $x^2 + y^2 = 13^2$

Демек, $\begin{cases} x + y + 13 = 30 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$ теңдемелер системасын түзүүгө болот.

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169, \end{cases} \begin{cases} x = 17 - y \\ x^2 + y^2 = 169, \end{cases}$$

$$(17 - y)^2 + y^2 = 169$$

$$289 - 34y + y^2 + y^2 = 169$$

$$2y^2 - 34y + 289 - 169 = 0$$

$$y^2 - 17y + 60 = 0, \quad D = 289 - 240 = 49$$

$$y_{1/2} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2}; \quad y_1 = \frac{17 - 7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad y_2 = \frac{17 + 7}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

$$x_1 = 17 - 5 = 12, \quad x_2 = 17 - 12 = 5.$$

Жообу: 5 см, 12 см.

4-маселе. Эки орундуу сандын цифраларынын суммасы 6га барабар. Эгерде цифралардын ордун алмаштырсак, пайда болгон сан, алгачкы берилген сандын $\frac{4}{7}$түн түзсө, ал санды тапкыла.

Чыгаруу: Изделүүчү сандын ондуктарынын цифрасы x, ал эми бирдиктердин цифрасы y болсун. Анда ал $10x+y$ саны болот.

Маселенин шарты боюнча $x+y=6$ жана $10y + x = \frac{4}{7}(10x + y)$. Мында төмөнкүдөй теңдемелер системасын түзүп алабыз.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 10y + x = \frac{4}{7}(10x + y), \end{cases} \begin{cases} x + y = 6 \\ 70y + 7x = 40x + 4y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 66y - 33x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = 2. \end{cases}$$

Жообу: 42 саны.

5-маселе. Бир эритемеде 15% күкүрт кислотасы бар. Экинчи эритмеде 40 % күкүрт кислотасы бар. 30%дуу 70 литр эритме алуу үчүн эритмелердин ар биринен канчадан алуу керек?

Чыгаруу: Биринчи эритмеден x литр алынсын дейли, анда экинчи эритмеден $70-x$ литр алынат.

Биринчи эритмеде $0{,}15 \cdot x$ литр күкүрт кислотасы бар.

Экинчи эритмеде $0{,}4(70-x)$ литр күкүрт кислотасы бар. Маселенин шарты боюнча 30%дуу эритме алыныныш керек.

Демек, $0{,}15x + 0{,}4(70 - x) = 0{,}3 \cdot 70$теңдемесин түзүүгө болот.

$$0{,}15x + 28 - 0.4x = 21$$
$$-0{,}25x = 21 - 28$$
$$-0{,}25x = -7$$
$$x = -7: (-0{,}25)$$
$$x = 28(\text{литр})$$
$$70 - 28 = 42(\text{литр})$$

Жообу: 28 (литр), 42 (литр).

6-маселе. Квадрат формасындагы фанерадан, туурасы 30 см болгон тик бурчтук тилкени кесип алышты. Фанеранын калган бөлүгү, аянты 1000 см^2 болгон тик бурчтук болсо, анын баштапкы өлчөмдөрүн тапкыла.

Чыгаруу: Квадрат формасындагы фанеранын жактары – x см болсун. Анда, фанеранын калган бөлүгү узуну x см, туурасы x–30 см болгон тик бурчтук болот.

Маселенин шарты боюнча

$$x(x-30) = 1000\ (\text{см}^2) \text{ теңдемесин алабыз.}$$

$$x^2 - 30x - 1000 = 0$$

$$D = 900 - 4 \cdot (-1000) = 900 + 4000 = 4900$$

$$x_{1/2} = \frac{30 \pm \sqrt{4900}}{2} = \frac{30 \pm 70}{2}$$

$$x_1 = \frac{30+70}{2} = 50$$

$$x_2 = \frac{30-70}{2} = -20.$$

Жообу: 50 см.

7-маселе. Үч орундуу сандын цифраларынын суммасы 12ге, ал эми цифраларынын квадраттарынын суммасы 56га барабар. Эгерде ал сандын жүздүгүнүн цифрасы ондугу менен бирдигинин цифраларынын суммасына барабар болсо, ал санды тапкыла.

Чыгаруу: Берилген сандын ондук цифрасы x, бирдик цифрасы y болсун дейли. Анда жүздүк цифра $x+y$ болот. Маселенин шарты боюнча төмөндөгүдөй теңдемелер системасын түзөбүз.

$$\begin{cases} (x+y)+x+y=12 \\ (x+y)^2+x^2+y^2=56, \end{cases} \begin{cases} x+y=6 \\ x^2+xy+y^2=28, \end{cases}$$

$$x = 6 - y$$

$$(6-y)^2 + (6-y)y + y^2 = 28$$

$$36 - 12y + y^2 + 6y - y^2 + y^2 = 28$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 8 = 4$$

$$y_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}; \quad y_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4, \ \ y_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$x_1 = 6 - 4 = 2, \ \ x_2 = 6 - 2 = 4$$

Жообу: 624 же 642.

8-маселе. Баасы 18000 сом болгон товар эки жолу бирдей пайыздуу көрсөткүчкө арзандатылган. Эгерде товардын акыркы баасы 13005 сом болсо, анда ар бир жолу канча пайызга арзандаган?

Чыгаруу: Товар ар бир жолу x% дан арзандасын дейли. Анда 1-жолу арзандаганда $\frac{1800\cdot x}{100} = 180x$ сомго арзандайт. Демек, товардын 1-жолу арзандаган баасы $18000 - 180 \cdot x$ сом болот.

2-жолу арзандаганда $\frac{(18000-180x)x}{100}$ сомго арзандайт.

Анда товардын акыркы баасы төмөнкүдөй болот.

$$(18000 - 180x) - \frac{(1800 - 180x)x}{100} = 13005$$
$$180(100 - x) - \frac{180(100 - x)\cdot x}{100} = 13005$$
$$18000(100 - x) - 180(100x - x^2) = 1300500$$
$$10000 - 100x - 100x + x^2 = 7225$$
$$x^2 - 200x + 2775 = 0$$
$$D = 40000 - 4 \cdot 2775 = 28900$$
$$x_{1/2} = \frac{200 \pm \sqrt{28900}}{2} = \frac{200 \pm 170}{2}$$

$x_1 = \frac{200+170}{2} = \frac{370}{2} = 185;\ x_2 = \frac{200-170}{2} = \frac{30}{2} = 15.$

Жообу: 15% дан арзандаган.

2.5. Көнүгүүлөр үчүн маселелер

28. Теплоход агым боюнча 66км, агымга каршы 36 км жүрүп, бардык жолго 5 саат саптаган. Эгерде суунун агымынын ылдамдыгы 2 км/саат болсо, теплоходдун өздүк ылдамдыгын тапкыла.

Чыгаруу: Теплоходдун өздүк ылдамдыгы x км/саат болсун. Анда, x+2 км/саат – теплоходдун агым боюнча ылдамдыгы, x–2 км/саат – теплоходдун агымга каршы ылдамдыгы, $\frac{66}{x+2}$–агым боюнча жүргөнгө сарптаган убакыт, $\frac{36}{x-2}$ – агымга каршы жүргөнгө сарпталган убакыт болот.

Маселенин шарты боюнча төмөнкүдөй теңдеме түзөбүз.

$$\frac{66}{x+2} + \frac{36}{x-2} = 5$$
$$66(x - 2) + 36(x + 2) = 5(x^2 - 4)$$
$$66x - 132 + 36x + 72 = 5x^2 - 20$$

$$5x^2 - 102x + 40 = 0$$
$$D = 10404 - 800 = 9604$$
$$x_{1/2} = \frac{102 \pm \sqrt{9604}}{10} = \frac{102 \pm 98}{10}$$
$$x_1 = \frac{102+98}{10} = 20;\; x_2 = \frac{102-98}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Жообу: 20 км/саат.

29. Тик бурчтуктун аянты 320 $см^2$ ка барабар. Эгерде тик бурчтуктун жактары $\frac{4}{5}$ сыяктуу катышса, анда анын жактарын тапкыла.

Чыгаруу: Тик бурчтуктун жактары x см жана y см болсун дейли. Анда, маселенин шарты боюнча $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$, жана $S = x \cdot y = 320$, мындан төмөнкүдөй теңдеме түзүүгө болот.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{5} \\ x \cdot y = 320, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{4}{5}y \\ x \cdot y = 320, \end{cases} \quad \frac{4}{5}y \cdot y = 320,$$
$$\frac{4}{5}y^2 = 320\,,\; y^2 = 400,$$
$$y_{1/2} = \pm\sqrt{400} = \pm 20\,;$$
$$x = \frac{4}{5} \cdot 20 = 16см.$$

Жообу: 16 см жана 20 см.

30. Эки трактор талааны 2 күндө айдап бүтөт. Эгерде жер айдоону бүтүрүү үчүн бир трактор экинчи тракторго караганда 3 күн аз кетсе, ар бир трактор өзүнчө канча күндө айдап бүтөт.

Чыгаруу: 1-трактор өзү жеке x күндө, экинчи трактор y күндө айдап бүтүрсүн дейли, анда маселенин шартына ылайык теңдеме түзөбүз.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ x - y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2y + 2x = xy \\ x = 3 + y, \end{cases} \quad 2y + 2(3+y) = (3+y)y,$$
$$2y + 6 + 2y = 3y + y^2$$
$$y^2 - y - 6 = 0$$
$$D = 1 - 4 \cdot (-6) = 25$$

$$y_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}\ ; \quad y_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3, \ \ y_2 = \frac{1-5}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

$$x = 3 + y = 3 + 3 = 6$$

Жообу: 3 күндө, 6 күндө.

31. Аралыгы 900 км А жана В шаарларынан бири-бирин көздөй эки жеңил машина чыкты. Алар 5 сааттан кийин жолугушту. Эгерде алардын биринин ылдамдыгы экинчисинин ылдамдыгынан 20 км/саатка чоң болсо, машиналардын ылдамдыктарын тапкыла.

Чыгаруу: Алардын биринин ылдамдыгы x км/саат болсун, анда экинчисинин ылдамдыгы x–20 км/саат болот.

Маселенин шарты боюнча төмөнкүдөй теңдеме түзөбүз.

$$5x + 5(x - 20) = 900$$
$$5x + 5x - 100 = 900$$
$$10x = 1000$$
$$x = 1000 : 10$$

$x = 100$ км/саат $x - 20 = 100 - 20 = 80$ км/саат.

Жообу: 100 км/саат; 80 км/саат.

32. Тик бурчтук формасындагы тактайдын аянты 5600 см^2. Андан тактайдын туурасына барабар, узуну 100 см болгон тик бурчтук формасындагы бө-лүгүн кесип алышты. Калган бөлүгү квадрат формасына ээ. Квадраттын жагын тапкыла.

28-сүрөт

Чыгаруу: Маселенин шартына байланышкан чийме чийип алалы. Берилген тик бурчтуктун аянты 5600 см^2.

Демек, $100x + x^2 = 5600$(см^2) теңдемесин түзүп алабыз.

$$x^2 + 100x - 5600 = 0$$
$$D = 10000 + 4 \cdot 5600 = 32400$$
$$x_{1/2} = \frac{-100 \pm \sqrt{32400}}{2} = \frac{-100 \pm 180}{2}$$
$$x_1 = \frac{-100+180}{2} = 40; \ \ x_2 = \frac{-100-180}{2} = -140.$$

Жообу: 40 см.

33. Бирдей өндүрүмдүүлүктөгү эки насос 16 $м^3$ сууну соруп чыгаргандан кийин, биринчи насос 1 саат 15 минутага оңдоого токтотулган. Оңдолгон насостун өндүрүмдүүлүгү $1м^3$ ка көбөйгөн. Эгерде эки насос 75 $м^3$ сууну чыгарса жана биринчи насос 38 $м^3$ суу чыгарганы белгилүү болсо, насостордун баштапкы өндүрүмдүүлүгүн тапкыла.

Чыгаруу: Насостордун өндүрүмдүүлүгү x $м^3$/саат болсун, анда биринчи насос токтотулганда экинчи насос $1\frac{1}{4}xм^3$суу соруп чыгарат. Биринчи насос токтогонго чейин ар бир насос $8м^3$ суу чыгарат. Маселенин шарты боюнча 1-насос 38 $м^3$, экинчи насос 37 $м^3$ суу чыгарат. Биринчи насос x+1 $м^3$/саат, 2–насос x $м^3$/саат өндүрүмдүүлүктө tсаат чогуу иштесин дейли, анда төмөнкүдөй теңдемелер системасын түзүүгө болот.

$\begin{cases} 8+t(x+1)=38 \\ 8+tx+\frac{5}{4}x=37, \end{cases}$ $\begin{cases} 8+tx+t=38 \\ 8+tx+\frac{5}{4}x=37 \end{cases}$ Теңдемелерди мүчөлөп кемитебиз $t-\frac{5}{4}x=1,$ $t=1+\frac{5}{4}x$ экинчи теңдемеге $t=1+\frac{5}{4}x$ ти коебуз, $8+x(1+\frac{5}{4}x)=37$

$$8+x(1+\frac{5}{4}x+\frac{5}{4})=37$$

$$8+\frac{9}{4}x+\frac{5}{4}x^2=37$$

$$5x^2+9x-29=0$$

$$D=81+2320=2401$$

$$x_{1/2}=\frac{-9\pm\sqrt{2401}}{10}=\frac{-9\pm49}{10}$$

$$x_1=\frac{-9+49}{10}=4;\ x_2=\frac{-9-49}{10}=-\frac{58}{10}=-5{,}8$$

Жообу: Насостордунөндүрүмдүүлүгү 4 $м^3$/саат.

34. Шаардын калкынын саны 2 жылда 30000 ден 33708 ге өстү. Бул шаардын калкынын орточо өсүү пайызын тапкыла.

Чыгаруу: Шаар калкынын орточо өсүү пайызы x% болсун дейли.

Анда биринчи жылы $\frac{30000x}{100}=300x$ке өсөт.

Экинчи жылы $\frac{(30000+300x)x}{100}=300x+3x^2$ка өсөт.

Эки жылдагы адам саны

$$30000 + 300x + 300x + 3x^2 = 33708$$
$$3x^2 + 600x - 3708 = 0$$
$$x^2 + 200x - 1236 = 0$$
$$D = 44944$$
$$x_{1/2} = \frac{-200 \pm \sqrt{44944}}{2} = \frac{-200 \pm 212}{2}$$
$$x_1 = \frac{-200+212}{2} = 6;\ x_2 = \frac{-200-212}{2} = -206$$

Жообу: 6% дан өскөн.

35. *A* шаарынан, аралыгы 770 км болгон *B* шаарын көздөй бир эле убакытта эки жүк ташуучу машина чыкты. Биринчи машинанын ылдамдыгы экинчи машинанын ылдамдыгынан 7 км/саатка чоң. Эгерде экинчи машина *B* шаарына биринчи машинадан 1 саат кеч келсе. анда ар бир машинанын ылдамдыгын тапкыла.

Чыгаруу: Биринчи машинанын ылдамдыгы x км/саат болсун, анда экинчи машинанын ылдамдыгы $x–7$ км/саат болот.

Маселенин шарты боюнча

$\frac{770}{x-7} - \frac{770}{x} = 1$теңдемесин түзөбүз.

$$770x - 770(x - 7) = x(x - 7)$$
$$770x - 770x + 5390 = x^2 - 7x$$
$$x^2 - 7x - 5390 = 0$$
$$D = 49 + 4 \cdot 5390 = 21609$$
$$x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{21609}}{2} = \frac{7 \pm 147}{2}$$
$$x_1 = \frac{7+147}{2} = 77;\ x_2 = \frac{7-147}{2} = -70$$
$$77 - 7 = 70\text{км/саат.}$$

Жообу: 77 км/саат, 70 км/саат.

III глава. Арифметикалык жана геометриялык прогрессия

3.1. Сан удаалаштыгы

Аныктама

Кандайдыр бир эреженин негизинде ар бири өзүнүн катар номерине ээ болгон сандардын катары сан удаалаштыгы деп аталат.

Мисалы: Жуп сандардын катары $2, 4, 6, ..., 2n, ...$

Так сандардын катары $1,3,5,....2n-1,...$

Ар бир так санга өзүнө тескери сан туура келген сандардын катары $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5},....\frac{1}{2n-1},...$

Жалпы учурда сан удаалаштыгы төмөндөгүдөй белгиленет.

$a_1, a_2, a_3,...,a_n, a_{n+1},....$

Мында a_n саны удаалаштыктын мүчөсү, n саны анын катар номери.

a_1– удаалаштыктын биринчи мүчөсү;

a_2– экинчи мүчөсү;

a_n– n – мүчөсү;

a_{n+1} – $(n+1)$ – мүчөсү.

Жогоруда берилген мисалдагы жуп сандардын удаалаштыгында: $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$; $a_n = 2n$ болуп эсептелет.

Сан удаалаштыгы көпчүлүк учурда n мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилет.

1-мисал. Сан удаалаштыгы $a_n = \frac{n(2n-1)}{2}$ формуласы менен берилген. Бул удаалаштыктын алгачкы үч мүчөсүн жана 20–мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: $a_1 = \frac{1(2\cdot1-1)}{2} = \frac{1\cdot1}{2} = 0{,}5;$

$a_2 = \frac{2(2\cdot2-1)}{2} = \frac{2\cdot3}{2} = 3;$

$a_3 = \frac{3(2\cdot3-1)}{2} = \frac{3\cdot5}{2} = 7{,}5;$

$a_{20} = \frac{20(2\cdot20-1)}{2} = \frac{20\cdot39}{2} = 390.$

Жообу: 0,5; 3; 7,5; 390.

Удаалаштыктын бир же бир нече мүчөлөрү берилип, $(n+1)$–мүчөсү өзүнөн мурдагы n –мүчөсү аркылуу чыгарылуучу формула менен берилсе, анда удаалаштыкты рекурренттик жол менен берилди деп айтабыз.

2-мисал. Удаалаштыктын $a_{n+1} = 2a_n - 1$ рекурренттик формула жана $a_1 = 3$ шарты аркылуу берилген. Удаалаштыктын алгачкы төрт мүчөсүн жазгыла.

Чыгаруу: Берилген шарт жана формула боюнча удаалаштын мүчөлөрүн табабыз.

$a_1 = 3;$

$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5;$

$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9;$

$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 17.$

Жообу: 3, 5, 9, 17.

3.2. Арифметикалык прогрессия

Аныктама

Арифметикалык прогрессия деп, экинчи мүчөсүнөн баштап улам кийинки мүчөсү мурункусуна бир эле туруктуу санды кошкондон пайда болгон сан удаалаштыгын айтабыз.

Арифметикалык прогрессиянын $(n + 1)$– жана n – мүчөсүнүн айырмасы n дин бардык маанилери үчүн бир эле сан болот. Ал арифметикалык прогрессиянын айырмасы деп аталып, d тамгасы менен белгиленет.

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

арифметикалык прогрессиясында

$a_{n+1} = a_n + d$ шарты аткарылат.

Мисалы: 3кө бөлүнүүчү сандардын удаалаштыгы 3, 6, 9, 12, ...3n,... айырмасы $d = 3$ болгон арифметикалык прогрессия:

2, 7, 12, 17, 22, 27 чектүү удаалаштыгы айырмасы $d = 5$ болгон арифметикалык прогрессия болот.

Теорема. Эгер a_1, a_2, $a_3, ..., a_n, ...$ айырмасы d болгон арифметикалык прогрессия болсо, анда анын n – мүчөсү

$a_n = a_1 + (n - 1)d$болот. (1)

1-маселе. Эгер $a_1 = 5$ жана $d = 2$ болсо, арифметикалык прогрессиянын 8–мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: (1) формула боюнча

$a_8 = 5 + (8 - 1) \cdot 2 = 5 + 7 \cdot 2 = 19$

Жообу: $a_8 = 19$.

2-маселе. 1, 4, 7, 10, ... арифметикалык прогрессиясы берилген. 58 саны анын канчанчы мүчөсү болот?

Чыгаруу: Бул арифметикалык прогрессиянын айырмасын таап алабыз.

$d = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3;\ a_n = 58$

(1) формула боюнча $58 = 1 + (n-1)3 = 3n - 2$

$$3n - 2 = 58$$
$$3n = 58 + 2$$
$$3n = 60$$
$$n = 20$$

Жообу: $a_{20} = 58$.

3-маселе. 3, 5, 7,... арифметикалык прогрессиясынын n – мүчөсүнүн формуласын жазгыла.

Чыгаруу: Бул арифметикалык прогрессиянын айырмасын таап алабыз.

$$d = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$$

Демек $d = 2;\ a_1 = 3$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ формуласы боюнча

$$a_n = 3 + (n-1)2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

Жообу: $a_n = 2n + 1$.

4-маселе. Эгерде, $a_6 = 16$, $a_{10} = 28$ болсо, бул арифметикалык прогрессиянын n – мүчөсүнүн формуласын жазгыла.

Чыгаруу: (1) формуланы пайдаланып төмөндөгүлөрдү табабыз: $a_6 = a_1 + 5d$, $a_{10} = a_1 + 9d$

$\begin{cases} a_1 + 5d = 16 \\ a_1 + 9d = 28 \end{cases}$ Экинчи теңдемеден биринчи теңдемени кемитсек

$4d = 12 \Rightarrow d = 3$экендиги келип чыгат.

$a_1 = 16 - 5d = 16 - 5 \cdot 3 = 1;\ a_n = 1 + (n-1)3 = 3n - 2$

Жообу: $a_n = 3n - 2$.

3.3. Арифметикалык прогрессиянын касиеттери

1-теорема. Арифметикалык прогрессиянын биринчи мүчөсүнөн башка ар бир мүчөсү аны менен коңшулаш эки мүчөсүнүн арифметикалык орто маанисине барабар.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ мында } n > 1.$$

1-маселе. Арифметикалык прогрессияда $a_6 = 26$,. $a_8 = 36$ болсо, анын жетинчи мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: 1-теорема боюнча

$a_7 = \frac{a_6+a_8}{2} = \frac{26+36}{2} = \frac{62}{2} = 31.$

Жообу:$a_7 = 31$.

2-теорема .Эгер удаалаштыктын биринчи мүчөсүнөн башка ар бир мүчөсү анын коңшулаш эки мүчөсүнүн арифметикалык орто маанисине барабар болсо, анда ал удаалаштык арифметикалык прогрессия болуп эсептелет.

2-маселе. Үч бурчтуктун ички бурчтарынын градустук чени прогрессиянын удаалаш үч мүчөсү болуп эсептелет. Бул мүчөлөрдүн ортоңкусун тапкыла.

Чыгаруу: Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180^0 боло тургандыгы бизге белгилүү. Бурчтардын чоңдугу арифметикалык прогрессияны түзгөндүктөн, аларды төмөнкүдөй белгилеп алабыз.

a_1– биринчи бурч $a_1 + d$– экинчи бурч $a_1 + 2d$– үчүнчү бурч	Арифметикалык прогрессиянын 1–2–3-мүчөлөрү

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 180^0$$
$$3a_1 + 3d = 180^0$$
$$a_1 + d = 60^0$$

1-теореманын негизинде $a_1 + d = 60^0$ ортоңку бурчтун градустук чени болот.

3-маселе. Арифметикалык прогрессияда $a_5 + a_7 = 40$, $a_8 + a_{10} = 58$ болсо, анда $a_6 + a_9$ ну тапкыла.

Чыгаруу: 1–теорема боюнча $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ формуласын пайдаланабыз.

$a_6 = \frac{a_5+a_7}{2} = \frac{40}{2} = 20$, $a_9 = \frac{a_8+a_{10}}{2} = \frac{58}{2} = 29$

Демек, $a_6 + a_9 = 20 + 29 = 49$.

Жообу: 49.

3.4. Арифметикалык прогрессиянын алгачкы пмүчөлөрүнүн суммасы

Теорема. Арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы

(1) $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ге барабар.

1-маселе. Так натуралдык сандардын удаалаштыгынын алгачкы элүү мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Чыгаруу: Так натуралдык сандардын удаалаштыгы 1, 3, 5, ..., $2n-1$, ... айырмасы $d = 2$ болгон арифметикалык прогрессия болот.

Демек, $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$, $a_{50} = 2 \cdot 50 - 1 = 99$

$n = 50$, $a_{50} = 99$.

$S_{50} = \frac{1+99}{2} \cdot 50 = \frac{100}{2} \cdot 50 = 2500.$

Жообу: 2500.

Прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын биринчи мүчөсү жана прогрессиянын айырмасы d аркылуу төмөнкүдөй туюнтууга болот.

$$S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n \qquad (2)$$

2-маселе. 8, 11, 14, ... арифметикалык прогрессиясынын алгачкы 20 мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Чыгаруу: $a_1 = 8, d = 3, n = 20$.

(2) формула боюнча $S_{20} = \frac{2\cdot 8+(20-1)3}{2} \cdot 20 = \frac{16+19\cdot 3}{2} \cdot 20 = 730$

Жообу: $S_{20} = 730$.

3-маселе. Эгер:

а) $a_1 = 2$, $a_n = 59$, $n = 20$;

б) $a_1 = 1$, $a_n = 79$, $n = 40$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Чыгаруу: $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ формуласын пайдаланабыз.

а) $a_1 = 2$, $a_n = 59$, $n = 20$.

$S_{20} = \frac{2+59}{2} \cdot 20 = \frac{61}{2} \cdot 20 = 610$

Жообу: 610.

б) $a_1 = 1$, $a_n = 79$, $n = 40$.

$S_{40} = \frac{1+79}{2} \cdot 40 = \frac{80}{2} \cdot 40 = 1600$

Жообу: 1600.

4-маселе. 21 ден 50гө чейинки бардык эки орундуу сандардын суммасын тапкыла.

Чыгаруу: $a_1 = 21, \ a_n = 50, \ n = 30.$

$S_{30} = \frac{21+50}{2} \cdot 30 = \frac{71}{2} \cdot 30 = 2130$

Жообу: 2130.

5-маселе. $b^2, \ 2b^2, \ 3b^2, \ldots$ арифметикалык прогрессиясынын алгачкы 14 мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Чыгаруу: $a_1 = b^2, \ \ a_{14} = 14b^2, \ n = 14$

(1) формула боюнча $S_{14} = \frac{b^2+14b^2}{2} \cdot 14 = 15b^2 \cdot 7 = 105b^2$

Жообу: $105b^2$.

6-маселе. Эгер кошулуучулары арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болуп эсептелсе, сандардын төмөнкүдөй суммаларын тапкыла.

а) 6+8+10+...+104; б) 40+36+32+...+(–76).

Чыгаруу: а) $a_1 = 6, \ d = 2, \ a_n = 104.$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ формуласы боюнча n ди табабыз.

$$104 = 6 + (n-1)2$$
$$6 + 2n - 2 = 104$$
$$2n = 104 - 4$$
$$n = 100:2$$
$$n = 50$$

Демек, 104 саны 50–мүчө болот.

(1) формула боюнча $S_{50} = \frac{6+104}{2} \cdot 50 = \frac{110}{2} \cdot 50 = 2750$

Жообу: 2750.

б) **Чыгаруу:** $a_1 = 40, \ d = -4, \ a_n = -76 n$ ди табабыз.

$$40 + (n-1)(-4) = -76$$
$$40 - 4n + 4 = -76$$
$$-4n = -120$$
$$n = -120:(-4) = 30$$

(1) формула боюнча $S_{30} = \frac{40+(-76)}{2} \cdot 30 = \frac{-36}{2} \cdot 30 = -540$

Жообу: -540.

7-маселе. n – мүчөсүнүн формуласы $a_n = 2n + 3$ арифметикалык прогрессиянын S_{40} ны тапкыла.

Чыгаруу: $a_n = 2n + 3$ формуласы боюнча прогрессиянын алгачкы мүчөлөрүн табабыз.

$$a_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$
$$a_{40} = 2 \cdot 40 + 3 = 83$$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ формуласы боюнча

$$S_{40} = \frac{5 + 83}{2} \cdot 40 = 88 \cdot 20 = 1760$$

Жообу: 1760.

8-маселе. Арифметикалык прогрессияда $a_1 = 7$, $n = 15$, $S_{15} = 420$ болсо, a_n ди жана d ны тапкыла.

Чыгаруу: (2) формула боюнча

$420 = \frac{2 \cdot 7 \quad +14d}{2} \cdot 15$ теңдемесин алабыз

$$28 = 7 + 7d$$
$$7d = 28 - 7$$
$$d = 21 : 7 = 3$$
$$a_{15} = 7 + 14 \cdot 3 = 49$$
$$S_{15} = \frac{7 + 49}{2} \cdot 15 = \frac{56}{2} \cdot 15 = 420$$

Жообу: $d = 3, a_{15} = 49$.

3.1.–3.4. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

36. n – мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген удаалаштыктын алгачкы үч мүчөсүн тапкыла.

а) $a_n = 3n + 1$б)$a_n = 2 + 5n$

в)$a_n = 7n - 5$ г)$a_n = 2^{n+1}$

Чыгаруу: а) $a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$
$$a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

Жообу: 4,7,10.

б) $a_1 = 2 + 5 \cdot 1 = 7$
$a_2 = 2 + 5 \cdot 2 = 12$
$a_3 = 2 + 5 \cdot 3 = 17$

Жообу: 7,12,17.

в)$a_1 = 7 \cdot 1 - 5 = 2$
$a_2 = 7 \cdot 2 - 5 = 9$
$a_3 = 7 \cdot 3 - 5 = 16$

Жообу: 2,9,16.

г) $a_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4$
$a_2 = 2^{2+1} = 2^3 = 8$
$a_3 = 2^{3+1} = 2^4 = 16$

Жообу: 4,8,16.

37. Удаалаштык n – мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген. Анын 5-мүчөсүн тапкыла.

а) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$б)$a_n = \frac{n+7}{3n-1}$

в) $a_n = |n-9| - 3$г) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Чыгаруу: а) $a_5 = 5 \cdot 2^{5-1} = 5 \cdot 2^4 = 5 \cdot \ \ 16 = 80$

Жообу:80.

б)$a_5 = \frac{5+7}{3 \cdot 5 - 1} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

Жообу: $\frac{6}{7}$.

в) $a_5 = |5-9| - 3 = |-4| - 3 = 4 - 3 = 1$

Жообу: 1.

г) $a_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

Жообу: $\frac{1}{81}$.

38. Удаалаштык $a_1 = 2$ шарты менен $a_{n+1} = 2a_n - 1$ рекурренттик формуласы аркылуу берилген. Удаалаштыктын алгачкы төрт мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$
$a_4 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

Жообу: 2,3,5,9.

39. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ арифметикалык прогрессиясынан

а) Эгерде, $a_1 = 5, d = 2$ болсо, a_{12} ни;

б) Эгерде, $a_1 = 4, d = -3$ болсо, a_{18} ни тапкыла.

Чыгаруу: $a_n = a_1 + (n-1)d$ формуласы боюнча табабыз.

а) $a_{12} = 5 + (12-1)2 = 5 + 22 = 27;$

б) $a_{18} = 4 + (18-1)(-3) = 4 - 51 = -47.$

Жообу: а) 27; б) –47.

40. Эгер:

а) $a_1 = 7, \ a_{15} = 49;$ б) $a_1 = 12, \ a_{20} = 88$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын айырмасын тапкыла.

Чыгаруу:

$$a_{15} = 7 + (15-1)d \qquad a_{20} = 12 + (20-1)d$$
$$49 = 7 + 14d \qquad 88 = 12 + 19d$$
$$14d = 42 \qquad 19d = 76$$
$$d = 42:14 \qquad d = 76:19$$
$$d = 3 \qquad d = 4$$

Жообу: а) $d = 3;$ б) $d = 4.$

41. а) $a_3 = 11, \ a_8 = 26;$ б) $a_2 = 8, \ a_5 = 2$ болсо, анда арифметикалык прогрессиянын n – мүчөсүнүн формуласын жазгыла.

Чыгаруу: $a_n = a_1 + (n-1)d$ формуласынын негизинде

а) $a_3 = a_1 + 2d$, $a_8 = a_1 + 7d$

$\begin{cases} a_1 + 2d = 11 \\ a_1 + 7d = 26 \end{cases}$ 2–теңдемеден 1-теңдемени мүчөлөп кемитебиз

$$5d = 15$$
$$d = 15:5$$
$$d = 3a_1 + 2 \cdot 3 = 11 \text{ мындан } a_1 = 5$$

Демек, $a_n = 5 + (n-1)3 = 3n + 2$

Жообу: $a_n = 3n + 2.$

б) $a_2 = a_1 + d$, $a_5 = a_1 + 4d$

$\begin{cases} a_1 + d = 8 \\ a_1 + 4d = 2 \end{cases}$ 2–теңдемеден 1-теңдемени мүчөлөп кемитебиз

$$3d = -6$$
$$d = (-6):3$$
$$d = -2a_1 + (-2) = 8 \Rightarrow a_1 = 10$$

Демек, $a_n = 10 + (n-1)(-2) = 12 - 2n$

Жообу: $a_n = 12 - 2n.$

42. 15 саны 50, 45, 40,... арифметикалык прогрессиясынын мүчөсү болуп эсептелет. Ошол мүчөнүн номерин тапкыла.

Чыгаруу: $a_1 = 50,\ d = -5,\ a_n = 15n$ ди табабыз.

$$a_n = 50 + (n-1)(-5) = 55 - 5n$$
$$55 - 5n = 15$$
$$-5n = 15 - 55$$
$$-5n = -40$$
$$n = 8$$

Жообу: 8 мүчө.

43. Эгер, $a_{14} = 81$ жана $a_{16} = 93$ болсо, арифметикалык прогрессиянын он бешинчи жана биринчи мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ формуласын пайдаланабыз.

$a_{15} = \frac{a_{14}+a_{16}}{2} = \frac{81+93}{2} = 87$; демек, $d = 6$

$$a_1 + 14 \cdot 6 = 87$$
$$a_1 = 87 - 84 = 3$$

Жообу: $a_1 = 3;\ a_{15} = 87$.

44. –7 жана 5 сандарынын арасына арифметикалык прогрессиясынын удаалаш төрт мүчөсү келип чыга тургандай эки санды коюп чыккыла.

Чыгаруу: Маселенин шарты боюнча

$a_1 = -7,\ a_4 = 5$ болот.

$$a_4 = a_1 + 3d$$
$$-7 + 3d = 5$$
$$3d = 12$$
$$d = 4$$

Демек, $a_2 = a_1 + d = -7 + 4 = -3$

$$a_3 = a_2 + d = -3 + 4 = 1$$

Жообу: –3 жана 1 сандары коюлат.

45. a жана b сандарынын арасына арифметикалык прогрессиянын удаалаш төрт мүчөсү келип чыга тургандай эки санды коюп чыккыла.

Чыгаруу: Маселенин шарты боюнча $a_1 = a,\ \ a_4 = b$ болот. Эми прогрессиянын айырмасын табабыз.

$$a_1 + 3d = a_4$$
$$a + 3d = b$$
$$3d = b - a$$

$$d = \frac{b-a}{3}$$

Демек, $a_2 = a_1 + d = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3}$; $a_3 = \frac{2a+b}{3} + \frac{b-a}{3} = \frac{a+2b}{3}$

Жообу: , $a_2 = \frac{2a+b}{3}$; $a_3 = \frac{a+2b}{3}$

46. Эгер: а) $a_1 = \sqrt{5}$, $a_n = \sqrt{5} + 10, n = 6$;

б) $a_1 = b + c$, $a_n = 8b - 6c, n = 8$болсо, анда арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Чыгаруу: а) $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ формуласын пайдаланабыз.

$$S_6 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5} + 10}{2} \cdot 6 = \left(2\sqrt{5} + 10\right) \cdot 3 = 6\sqrt{5} + 60$$

Жообу: $6\sqrt{5} + 60$.

б) $a_1 = b + c$, $a_n = 8b - 6c, n = 8$.

$$S_8 = \frac{b + c + 8b - 6c}{2} \cdot 8 = (9b - 5c) \cdot 4 = 36b - 20c$$

Жообу: $S_8 = 36b - 20c$.

47. 11 ден 200 гө чейинки бардык так сандардын суммасын тапкыла.

Чыгаруу: 11 ден 200 гө чейинки так сандар айырмасы $d = 2$ болгон арифметикалык прогрессия. Так сандардын саны 95. Демек, $a_1 = 11$, $d = 2$, $n = 95$.

$$S_{95} = \frac{2 \cdot 11 + 94 \cdot 2}{2} \cdot 95 = \frac{210}{2} \cdot 95 = 9975$$

Жообу: 9975.

48. Эгер: а) $n = 15$ болсо, 5,8,11,...

б) $n = 10$ болсо, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, ... арифметикалык прогрессиясынын n мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Чыгаруу: а) Берилген прогрессияда $a_1 = 5$, $d = 3$, $n = 15$.

(2) формула боюнча $S_{15} = \frac{2 \cdot 5 + (15-1) \cdot 3}{2} \cdot 15 = \frac{52}{2} \cdot 15 = 390$

Жообу: 390.

б) $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, ... арифметикалык прогрессиясында

$a_1 = \frac{2}{3},\ d = \frac{1}{3},\ n = 10.$

Демек, $S_{10} = \frac{2\cdot\frac{2}{3}+(10-1)\cdot\frac{1}{3}}{2} \cdot 10 = \frac{\frac{4}{3}+3}{2} \cdot 10 = 4\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

Жообу: $21\frac{2}{3}$.

49. Арифметикалык прогрессия n– мүчөсүнүн формуласы менен берилген. Эгер:

а) $a_n = 2n + 7$; б) $a_n = 12 - 5n$ болсо, S_{40}ты тапкыла.

Чыгаруу: а) $a_n = 2n + 7, n = 40,$

$a_1 = 2 \cdot 1 + 7 = 9$

$a_{40} = 2 \cdot 40 + 7 = 87$

(1) формула боюнча $S_{40} = \frac{9+87}{2} \cdot 40 = 96 \cdot 20 = 1920$

Жообу: 1920.

б) $a_n = 12 - 5n,\ n = 40,$

$a_1 = 12 - 5 \cdot 1 = 7$

$a_{40} = 12 - 5 \cdot 40 = -188$

(1) формула боюнча $S_{40} = \frac{7-188}{2} \cdot 40 = (-181) \cdot 20 = -3620$

Жообу: $S_{40} = -3620$.

50. Кошулуучулары арифметикалык прогрессиянын удаалаш мүчөлөрү болгон сандардын төмөнкүдөй суммасын тапкыла.

а) 25+32+39+...+375; б) –15+(–12)+(–9)+...+69.

Чыгаруу:

а) $a_1 = 25,\ d = 7\ a_n = 375\ a_n = a_1 + (n-1)d$ формуласы аркылуу nди таап алабыз.

$$375 = 25 + (n - 1) \cdot 7$$

$$25 + 7n - 7 = 375$$

$$7n = 375 - 18$$

$$7n = 357$$

$$n = 51.$$

Демек, $a_{51} = 375$ болот. (1) формула боюнча $s_{51} = \frac{25+375}{2} \cdot 51 =$

$$= \frac{400}{2} \cdot 51 = 200 \cdot 51 = 10200$$

Жообу: 10200.

б) $a_1 = -15,\ d = 3,\ a_n = 69$.n ди табабыз.

$$-15 + (n-1)3 = 69$$
$$-15 + 3n - 3 = 69$$
$$3n = 69 + 18$$
$$3n = 87$$
$$n = 29$$

Демек, $a_{29} = 69$ (1) формула боюнча сумманы табабыз

$$s_{29} = \frac{-15+69}{2} \cdot 29 = 27 \cdot 69 = 1863.$$

Жообу: 1863.

51. Эгер: $s_4 = 52,\ s_7 = 154$ болсо, арифметикалык прогрессиянын биринчи мүчөсүн жана айырмасын тапкыла.

Чыгаруу: Изделүүчү прогрессия $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots, a_7, \dots$болсун. Анда, анын биринчи мүчөсү a_1, айырмасы d болот.

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ формуласын пайдаланабыз

$a_4 = a_1 + 3d,\quad a_7 = a_1 + 6d.$

$$s_4 = \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = \frac{a_1 + a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = (2a_1 + 3d) \cdot 2 = 4a_1 + 6d;$$
$$4a_1 + 6d = 52.$$
$$s_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = \frac{2(a_1 + 3d)}{2} \cdot 7 == 7a_1 + 21d;$$

$7a_1 + 21d = 154.$

Теңдемелер системасын түзүп алабыз.

$$\begin{cases} 4a_1 + 6d = 52 \\ 7a_1 + 21d = 154 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3d = 26 \\ a_1 + 3d = 22 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1 - 4$$

1-теңдемеден 2-теңдемени мүчөлөп кемитебиз.

$a_1 = 4$ a_1 дин маанисин 2-теңдемеге коюп $4 + 3d = 22$

$3d = 18$, $d = 6$ айырманы табабыз.

Жообу: $a_1 = 4,\ \ d = 6.$

3.5. Геометриялык прогрессия

Аныктама. Биринчи мүчөсү нөлдөн айырмалуу, ал эми экинчи мүчөсүнөн баштап улам кийинки мүчөсү мурункусун нөлдөн башка бир эле санга көбөйткөндөн пайда болгон сан удаалаштыгы геометриялык прогрессия деп аталат.

Геометриялык прогрессиянын $(n+1)$– мүчөсүн n– мүчөсүнө бөлгөндөгү тийинди nдин бардык маанилери үчүн бирдей сан болот. Бул сан геометриялык прогрессиянын бөлүмү деп аталат жана qтамгасы менен белгиленет.

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$удаалаштыгы $b_{n+1} = b_n \cdot q$шарты аткарылганда гана геометриялык прогрессия болот.

Мисалдар: 3, 6, 12, 24,...– бул бөлүмү $q = 3$ болгон геометриялык прогрессия;

$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \dots$ –бул бөлүмү $q = -\frac{1}{4}$ болгон геометриялык прогрессия.

Теорема. Эгер $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ бөлүмү q болгон геометриялык прогрессия болсо, анда анын n мүчөсү

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ (1) болот.

1-маселе. Эгер $b_1 = 3$ жана $q = 2$ болсо, анда геометриялык прогрессиянын бешинчи мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: (1) формула боюнча

$$b_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

Жообу: $b_5 = 48$.

2-маселе. $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \dots$ геометриялык прогрессиясынынn – мүчөсүнүн формуласын жазгыла.

Чыгаруу: $b_1 = 2, \quad q = b_2 : b_1 = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$

Демек, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

Жообу: $b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

3-маселе. 405 саны 5, 15, 45, ... геометриялык прогрессиясынын канчанчы мүчөсү болот?

Чыгаруу: Бул геометриялык прогрессиянын бөлүмүн таап алабыз.$q = b_2 : b_1 = \frac{15}{5} = 3$

(1) формула боюнча $b_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ болот.

$$5 \cdot 3^{n-1} = 405 \Rightarrow 3^{n-1} = 81 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^4$$

$$n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

Жообу: $n = 5$.

4-маселе. $b_1,\ b_2,\ b_3, \dots, b_n, \dots$ геометриялык прогрессиясы берилген. Эгер $b_1 = 2$, $b_5 = 162$ болсо, анда анын бөлүмүн тапкыла.

Чыгаруу: (1) формула боюнча

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 \Rightarrow 2q^4 = 162 \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = 3.$$

Жообу: $q = 3$.

5-маселе. Эгер: $b_1 = \frac{1}{81}$ жана $b_6 = 3$ болсо, анда бул геометриялык прогрессиянын төртүнчү мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: $b_1 = \frac{1}{81}$, $b_6 = 3$ (1) формула боюнча

$$b_6 = b_1 \cdot q^5 \Rightarrow b_1 \cdot q^5 = 3 \Rightarrow \frac{1}{81} \cdot q^5 = 3 \Rightarrow q^5 = 3 : \frac{1}{81} = 3 \cdot 81 = 243$$

$$q^5 = 3^5 \Rightarrow q = 3$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 = \frac{1}{81} \cdot 3^3 = \frac{1}{81} \cdot 27 = \frac{1}{3}$$

Жообу: $b_4 = \frac{1}{3}$.

3.6. Геометриялык прогрессиянын касиеттери

1-теорема. Геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсүнөн башка ар бир мүчөсүнүн квадраты аны менен коңшулаш эки мүчөсүнүн көбөйтүндүсүнө барабар, б.а.

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, мында $n > 1$.

1-маселе. Эгер, $b_2 = 2,\ b_4 = 8$ болсо, анда геометриялык прогрессиянын алгачкы алты мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: $b_2 = 2,\ b_4 = 8$ 1–теорема боюнча b_3 тү таап алабыз.

$b_3^2 = b_2 \cdot b_4 = 2 \cdot 8 = 16$ Демек, $b_3 = 4$, эми q ну табабыз. Аныктаманы пайдаланабыз

$$b_2 \cdot q = b_3 \Rightarrow 2q = 4 \Rightarrow q = 2$$

$$b_1 = b_2 : q,\ \ b_1 = 2 : 2 = 1,\ b_5 = b_1 \cdot q^4 = 1 \cdot 2^4 = 16,\ b_6 = 32.$$

Ошентип, 1, 2, 4, 8, 16, 32 геометриялык прогрессиясын таптык.

Жообу: 1,2,4,8,16,32.

2-маселе. Эгер $b_3 = \frac{1}{8}$, $b_5 = \frac{1}{2}$ болсо, анда бул геометриялык прогрессиянын 8-мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: 1-теореманын негизинде $b_4^2 = b_3 \cdot b_5 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$b_4 = \frac{1}{4}$, $q = b_4 : b_3 = \frac{1}{4} : \frac{1}{8} = 2$, $b_1 = b_3 : q^2 = \frac{1}{8} : 4 = \frac{1}{32}$

демек, $q = 2$ анда $b_8 = b_1 \cdot q^7 = \frac{1}{32} \cdot 2^7 = \frac{1}{32} \cdot 128 = 4$

Жообу: $b_8 = 4$.

3.7. Геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы

Теорема. Бөлүмү $q \neq 1$ болгон геометриялык прогрессиянын n мүчөсүнүн суммасы $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ болот.

1-маселе. 8, 4, 2,.. геометриялык прогрессиясынын алгачкы алты мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Чыгаруу: $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$ болгондуктан $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ формуласы боюнча

$$S_6 = \frac{8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8(1 - \frac{1}{64})}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \cdot 63 \cdot 2}{64} = 15\frac{3}{4}$$

Жообу: $S_6 = 15\frac{3}{4}$.

Геометриялык прогрессияда $q > 1$ болгон учурда, анын мүчөлөрүнүн суммасын $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ формуласы менен эсептөө ыңгайлуу.

2-маселе. 3, 6, 12, ... прогрессиясынын алгачкы он мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Чыгаруу: $b_1 = 3$, $q = 2$ $n = 10$.

$s_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$формуласы боюнча $s_{10} = \frac{3\cdot(2^{10}-1)}{2-1} = \frac{3\cdot 1023}{1} = 3072$;

Жообу: $s_{10} = 3072$.

Геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасынын $s_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$формуласы аркылуу да эсуптөөгө болот.

3-маселе. Кошулуучулары геометриялык прогрессия болгон 1+3+9+...+729 суммасын тапкыла.

Чыгаруу: $b_1 = 1,\ q = 3,\ b_n = 729$. Анда $s_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ формуласы боюнча $s_n = \frac{729\cdot 3-1}{3-1} = \frac{2187-1}{2} = \frac{2186}{2} = 2093$

Жообу: $s_n = 2093$.

4-маселе. $-1, -2, -4,\ldots$ геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы–63кө барабар. *n* ди тапкыла.

Чыгаруу: $b_1 = -1,\ q = 2,\ s_n = -63$.

$s_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$формуласын пайдаланабыз.

$$-63 = \frac{-1(2-1)}{2-1} = \frac{-1\cdot(2^n-1)}{1} = -1\cdot(2^n-1)$$

$$2^n - 1 - 63,\quad 2^n = 64,\qquad 2^n = 2^6,\quad n = 6$$

Жообу: *n*=6.

3.8. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия жана анын суммасы

Аныктама.

Бөлүмү $|q|<|$болгон геометриялык прогрессия чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия деп аталат.

Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияда n чексизге жакындаган сайын bn нөлгө умтулат, б.а.

$$n \to \infty,\qquad b_n = b_1 q^{n-1} \to 0.$$

1-маселе. nдин кайсы маанисинде $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots, \frac{1}{5^{n-1}}$? ... геометриялык прогрессиясында, прогрессиянын мүчөлөрү 0,05тен кичине?

Чыгаруу:$\frac{1}{5^{n-1}} < \frac{5}{100}$; мындан $5^n > 100$ $5^2 = 25 < 100$, ал эми $5^3 = 125 > 100$ болот. демек $\frac{1}{5^{n-1}} \leq 0{,}05$ болуш үчүн $n \geq 4$болуш керек.

Жообу: $n \geq 4$.

2-маселе. –125, –25, –5, ...геометриялык прогрессиясы чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия экендигин далилдегиле.

Далилдөө: $b_1 = -125,\ q = \frac{1}{5},\quad b_n = -125\cdot q^{n-1}$.

Эгер n=3 болсо, $|b_3| = 5$.

Эгер n=4 болсо, $|b_4| = 1$

n номери улам өскөн сайын прогрессиянын bn мүчөсү модулу боюнча кичирейип жатат.

$q = \frac{1}{5} < 1$ болгондуктан аныктаманын негизинде бул прогрессия чексиз кемүүчү прогрессия болот.

Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы $s = \frac{b_1}{1-q}$болот.

$b_1 = 1$болгондо, $s = \frac{1}{1-q}$болот.

$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n+1} = \frac{1}{1-q}$ бул барабардык $|q| < 1$ болгондо гана аткарылат.

3-маселе. Чексиз кемүүчү $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \ldots$ геометриялык прогрессиянын суммасын тапкыла.

Чыгаруу:

$$b_1 = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}; \quad s = \frac{b_1}{1-q}; \quad s = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3};$$

4-маселе. Төмөнкү чексиз кемүүчү геометриялык рогрессиялардын суммасын тапкыла.

$$\text{а) } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \qquad \text{б) } -5, -1, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \ldots$$

Чыгаруу: $s = \frac{b_1}{1-q}$ формуласын колдонобуз.

а) $b_1 = 1;\ q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2};\ s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

Жообу: S=2.

б) $b_1 = -5;\ q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5};\ s = \frac{-5}{1-\frac{1}{5}} = \frac{-5}{\frac{4}{5}} = -\frac{25}{4} = -6\frac{1}{4}.$

Жообу: s=$-6\frac{1}{4}$.

5-маселе. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияя жалпы мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген. Эгер:

а) $b_n = (\frac{1}{3})^n$, б) $b_n = \frac{5}{2^{n-1}}$ болсо, анда анын суммасын тапкыла.

Чыгаруу: а) $b_n = (\frac{1}{3})^n,\ b_1 = \frac{1}{3},\ b_2 = \frac{1}{9},\ b_3 = \frac{1}{27}, ..$

$$q = \frac{1}{3}, \quad s = \frac{b_1}{1-q}$$

формуласын колдонобуз.

$$s = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Жообу: $s = \frac{1}{2}$.

б) $b_n = \frac{5}{2^{n-1}}$; $\quad b_1 = \frac{5}{2^0} = \frac{5}{1} = 5, \quad b_2 = \frac{5}{2^1} = \frac{5}{2},$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}; \quad s = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

Жообу: s=10.

3.9. Математикалык индукция методу жөнүндө түшүнүк

Кандайдыр бир формуланын каалагандай натуралдык сан үчүн туура экендигин далилдөө талап кылынсын дейли.

Анда ал үчүн: 1) берилген формуланын $n=1$ үчүн тууралыгы текшерилет;

2) Эгер ал формула $к$ саны үчүн туура болсо анда $к$ дан кийинки к+1 саны үчүн тууралыгы далилденет.

Далилдөөдө колдонулган бул метод математикалык индукция методу деп аталат.

1-маселе. Айырмасы d болгон $a_1, a_2, a_3 \dots, a_n, \dots$ арифметикалык прогрессиясынын жалпы мүчөсүнүн формуласы

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad (1)$$

боло тургандыгын далилдегиле.

Далилдөө: $n=1$ үчүн (1) формула туура:

$$a_1 = a_1 + (1-1) \cdot d = a_1$$

2) (1) формула k саны үчүн туура болсо, анда ал k+1 саны үчүн да туура боло тургандыгын, б.а.

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$
$$a_{k+1} = a_1 + kd$$

Формуласынын тууралыгын далилдейбиз.

Арифметикалык прогрессиянын аныктамасы боюнча

$a_{k+1} = (a_1 + (k-1)d) + d = a_1 + kd - d + d = a_1 + kd.$ демек (1) формуланын тууралыгы далилденди.

2-маселе. Математикалык индукция методу менен төмөнкү баоабардыктын тууралыгын текшергиле.

$$2 + 5 + 8 + \cdots + 3n - 1 = \frac{n(3n+1)}{2}; \qquad (2)$$

Далилдөө 1) $n = 1$ болгондо

$$2 = \frac{1\cdot(3\cdot 1+1)}{2} = 2, \text{ демек, } \frac{n(3n+1)}{2} \text{ формуласы туура.}$$

2) k натуралдык саны үчүн

$2 + 5 + 8 + \cdots + 3k - 1 = \frac{k(3k+1)}{2}$ барабардыгы (3) туура болсо, анда ал $k + 1$ үчүн да туура б.а.

$$2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) + (3k+1) = \frac{(k+1)(3k+4)}{2} \ (4)$$

барабардыгынын туура боло тургандыгын далилдейли.

(3) барабардыктын эки жагына тең $3k + 2$ ни б.а. $k + 1$-чи кошулуучуну кошолу

$$2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) + (3k+2) = \frac{k(3k+1)}{2} + (3k+2)$$

$$\frac{k(3k+1)}{2} + (3k+2) = \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} =$$

$$= \frac{3k^2 + 3k + 4k + 4}{2} = \frac{3k(k+1) + 4(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

болгондуктан (4) формуласы туура.

Демек, (2) барабардыктын тууралыгы далилденди.

3.5.–3.9 Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

52. Төмөнкү геометриялык прогрессиянын $n-$ мүчөсүнүн формуласын жазгыла.

а) 2,6,18,.... б) 7, –7, 7,....

в) $m + 2,\ (m+2)(m+1),\ (m+2)(m+1)^2, \ldots$

г) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

Чыгаруу: а) 2, 6, 18, ... бул геометриялык прогрессияда

$b_1 = 2, b_2 = 6,\ q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{6}{2} = 3$

(1) формула боюнча $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$болот.

б) 7, –7, 7,.... геометриялык прогрессиясында

$b_1 = 7, b_2 = -7,\ q = \frac{-7}{7} = -1$

Демек, $b_n = 7 \cdot (-1)^{n-1}$.

в) $m + 2,\ (m+2)(m+1),\ (m+2)(m+1)^2, \ldots$ прогрессиясында $b_1 = m + 2, b_2 = (m+2)(m+1)$,

$$q = \frac{(m+2)(m+1)}{m+2} = m+1$$

Демек, $b_n = (m+2)(m+1)^{n-1}$.

г) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$геометриялык прогрессиясында

$b_1 = 2, b_2 = 2\sqrt{2},\ q = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Демек, $b_n = 2 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$.

53. Геометриялык прогрессия n – мүчөсүнүн формуласы менен берилген. Анын алгачкы төрт мүчөсүн тапкыла.

а) $b_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ б) $b_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Чыгаруу: а) $b_n = 5 \cdot 3^{n-1};\ \ b_1 = 5 \cdot 3^{1-1} = 5 \cdot 3^0 = 5 \cdot 1 = 5;$
$b_2 = 5 \cdot 3^{2-1} = 5 \cdot 3^1 = 15;\ b_3 = 5 \cdot 3^{3-1} = 5 \cdot 3^2 = 45;$
$b_4 = 5 \cdot 3^{4-1} = 5 \cdot 3^3 = 5 \cdot 27 = 135.$

Жообу: 5, 15, 45, 135.

б) $b_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1};\quad b_1 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 9;$

$b_2 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3;$

$b_3 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1;$

$b_4 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-1} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 9 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{3}.$

Жообу: 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$.

54. $b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_n, \ldots$ геометриялык прогрессиясында:

а) Эгер $b_1 = 2, q = \frac{1}{3}$ болсо, анда b_4тү;

б) Эгер $b_1 = -3, q = 10$ болсо, анда b_5ти эсептеп чыккыла.

Чыгаруу: а) $b_1 = 2, q = \frac{1}{3}; b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ формуласы боюнча

$b_4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 2 \cdot \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$

Жообу: $\frac{2}{27}$.

б) $b_1 = -3, q = 10$

$$b_5 = -3 \cdot 10^{5-1} = -3 \cdot 10^4 = -30000$$

Жообу: –30000.

55. Төмөнкү геометриялык прогрессиянын бөлүмүн тапкыла.

а) $b_1 = 3; \quad b_7 = 192.$ б) $b_1 = 375; \quad b_4 = 3.$

Чыгаруу:

а) $b_1 = 3; \quad b_7 = 192.$

$b_n = b_1 q^{n-1}$ формуласы боюнча

$$b_7 = 3q^{7-1}$$
$$3q^6 = 192$$
$$q^6 = 192{:}\,3 = 64$$
$$q^6 = 2^6$$
$$q = 2$$

Жообу : $q = 2$

б) $b_1 = 375; \quad b_4 = 3.$

$$b_4 = 375q^3$$
$$375q^3 = 3$$
$$q^3 = \frac{3}{375} = \frac{1}{125}$$
$$q^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$
$$q = \frac{1}{5}$$

Жообу: $q = \frac{1}{5}$

56. 4, 8, 16, ... 512, ... геометриялык прогрессиясынын 512ге барабар болгон мүчөсүнүн номерин тапкыла.

Чыгаруу: $b_n = b_1 q^{n-1}$ формуласын пайдаланабыз.

$$b_1 = 4, q = 2, b_n = 512$$
$$4 \cdot 2^{n-1} = 512$$
$$2^{n-1} = 512{:}\,4 = 128$$
$$2^{n-1} = 2^7$$
$$n - 1 = 7$$
$$n = 8$$

Жообу: $b_8 = 512, n = 8$

57. $b_3 = 1, \quad b_7 = 81$ прогрессиясынын биринчи мүчөсүн, бөлүмүн жана n – мүчөсүнүн формуласын тапкыла.

Чыгаруу: $b_3 = 1, \ b_7 = 81.$ $b_n = b_1 q^{n-1}$ формуласын пайдаланабыз.

$$\begin{cases} b_3 = b_1 q^2 \\ b_7 = b_1 q^6, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 q^2 = 1 \\ b_1 q^6 = 81, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{q^2} \\ \dfrac{1}{q^2} q^6 = 81, \end{cases} \quad q^4 = 81, \quad q^4 = 3^4$$

Демек, $q = 3, \ b_1 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \ b_n = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1}$

Жообу: $b_1 = \frac{1}{9}, \ q = 3, \ b_n = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1}.$

58. Эгер $b_3 = 12a^2$, $b_8 = 384a^7$ болсо, анда геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсүн, бөлүмүн жана n – мүчөсүнүн формуласын тапкыла.

Чыгаруу: $b_3 = 12a^2$, $b_8 = 384a^7$ (1) формула боюнча

$b_3 = b_1 q^2$, $b_8 = b_1 q^7$ демек, төмөнкүдөй теңдемелер системасын түзөбүз.

$$\begin{cases} b_1 q^2 = 12a^2 \\ b_1 q^7 = 384a^7, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{12a^2}{q^2} \\ \dfrac{12a^2}{q^2} q^7 = 384a^7, \end{cases} \quad 12a^2 q^5 = 384a^7,$$

$$q^5 = \frac{384a^7}{12a^2}, \quad q^5 = 32a^5, \quad q^5 = (2a)^5, \quad q = 2a.$$

$b_2 = b_3 : q = 12a^2 : 2a = 6a$, $b_1 = b_2 : q = 6a : 2a = 3$,

$$b_n = 3 \cdot (2a)^{n-1}$$

Жообу: $b_1 = 3, q = 2a$, $b_n = 3 \cdot (2a)^{n-1}$.

59. Удаалаштык n – мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген:

а) $b_n = 2 \cdot 3^n$, б) $b_n = 3^{n-3}$.

Берилген удаалаштыктын геометриялык прогрессия экендигин далилдеп, анын биринчи мүчөсүн жана бөлүмүн тапкыла.

Чыгаруу: а) $b_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$, $b_2 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$,

$$b_3 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$$

6, 18, 54, ... бул удаалаштык $b_1 = 6$, $q = 3$ болгон геометриялык прогрессия болот.

Жообу: $b_1 = 6, q = 3$.

б) $b_1 = 3^{1-3} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $b_2 = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$,

$b_3 = 3^{3-3} = 3^0 = 1$.

Берилген удаалаштыктын мүчөлөрү $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \ldots$ болгон жана $b_1 = \frac{1}{9}$, $q = 3$ болгон геометриялык прогрессия болот.

Жообу: $b_1 = \frac{1}{9}, q = 3$.

60. Эгер: $b_1 \cdot b_5 = 1$ жана $b_3 \cdot b_6 = 8$ болсо, анда геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсүн жана бөлүмүн тапкыла.

Чыгаруу: Маçеленин шарты боюнча $b_1 \cdot b_5 = 1$ жана $b_3 \cdot b_6 = 8$. Буларды негиздеп, төмөнкүдөй теңдемелер системасын түзөбүз.

$$\begin{cases} b_1 \cdot b_5 = 1 \\ b_3 \cdot b_6 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 \cdot b_1 q^4 = 1 \\ b_1 q^2 \cdot b_1 q^5 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} {b_1}^2 q^4 = 1 \\ {b_1}^2 q^7 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{q^2} \\ \left(\dfrac{1}{q^2}\right)^2 q^7 = 8, \end{cases}$$

$q^3 = 8$, $q = 2$. $b_1 = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Жообу: $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$.

61. Геометриялык прогрессияда:

а) Эгер: $b_4 = 2, b_6 = 8$ болсо, 5-мүчөсүн;

б) Эгер: $b_3 = 16, b_5 = 64$ болсо, 4-мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: а) $b_4 = 2, b_6 = 8$

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ формуласынын негизинде

$$b_5^2 = b_4 \cdot b_6 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow b_5 = 4$$

Жообу: $b_5 = 4$.

б) $b_3 = 16, b_5 = 64$

$$b_4^2 = b_3 \cdot b_5 = 16 \cdot 64 = 1024 \Rightarrow b_4 = 32$$

Жообу: $b_4 = 32$.

62. Эгер $b_2 = 1$, $b_4 = 9$ болсо, анда геометриялык прогрессиянын алтынчы мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ формуласын пайдаланабыз.

$b_3^2 = b_2 \cdot b_4 = 1 \cdot 9 = 9$, $b_3 = 3$ Эми бөлүмү q ну табабыз.

$q = b_3 : b_2 = 3 : 1 = 3 b_1$ ди табабыз $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{1}{3}$, демек $b_1 = \frac{1}{3}$

$$b_6 = b_1 q^5 = \frac{1}{3} \cdot 3^5 = \frac{1}{3} \cdot 243 = 81$$

Жообу: $b_6 = 81$.

63. $\frac{1}{3}$ жана 27 сандарынын ортосуна геометриялык прогрессиянын удалаш беш мүчөсү келип чыга тургандай 3 санды койгула.

Чыгаруу: Маселенин шарты боюнча

$b_1 = \frac{1}{3}$, $b_5 = 27$.

Бөлүм qну таап алалы. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$формуласы боюнча $\frac{1}{3}q^4 = 27,\ q^4 = 81,\ q = 3.$

Демек, $b_2 = b_1 \cdot q = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1, \quad b_3 = b_1 \cdot q^2 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3,$

$$b_4 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9$$

Жообу: 1, 3, 9 сандары коюлат.

64. Эгер:

а) $b_1 = \frac{1}{3},\ q = 3,\ n = 7;$ б) $b_1 = 32, q = \frac{1}{2}, n = 6$болсо, анда геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

Чыгаруу: а) $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ формуласын пайдаланабыз

$$S_n = \frac{\frac{1}{3}(3^n-1)}{3-1} = \frac{\frac{1}{3}(3^n-1)}{2} = \frac{3^7-1}{6} = \frac{2187-1}{6} = \frac{2186}{6} = 364\frac{1}{3}$$

б) $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$формуласын пайдаланабыз

$$S_n = \frac{32\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{32\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2}} = 64\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) =$$

$$= 64\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right) = 64\left(1-\frac{1}{64}\right) = 64 \cdot \frac{63}{64} = 63.$$

Жообу: а) $364\frac{1}{3}$; б) 63.

65. Төмөнкү геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

а) 4,8,16,..., $n = 7$; б) 243,81,27,..., $n = 6$.

Чыгаруу: а) $S_7 = \frac{4(2^7-1)}{2-1} = \frac{4(128-1)}{1} = 4 \cdot 127 = 508;$

б) $b_1 = 243, q = \frac{1}{3}, n = 6.$

$$S_6 = \frac{243\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{243\left(1-\frac{1}{729}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{3 \cdot 243\frac{728}{729}}{2} = \frac{729\frac{728}{729}}{2} =$$

$$= \frac{728}{2} = 364$$

66. Кошулуучулары геометриялык прогрессиянын мүчөлөрү болгон төмөнкү суммаларды тапкыла.

а) 3+6+12+...+384; б) 128+64+32+...+4.

Чыгаруу: а) $b_1 = 3, q = 2, b_n = 384.$

Бул сумманы $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ формуласы аркылуу эсептейбиз.

$S_n = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2-1} = \frac{768-3}{1} = 765.$

б) $b_1 = 128, q = \frac{1}{2}, b_n = 4.$ Бул сумманы эсептөө үчүн

$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}$ формуласын пайдаланабыз:

$S_n = \frac{128 - 4 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{128-2}{\frac{1}{2}} = \frac{126}{\frac{1}{2}} = 252.$

Жообу: а) $S_n = 765$; б) $S_n = 252.$

67. $b_1,\ b_2,\ b_3, \dots, b_n, \dots$ геометриялык прогрессиясы берилген. Эгер:

а) $q = 3, n = 6, S_n = 364$ болсо, b_1 ди жана b_4;

б) $b_1 = 3; q = 2, S_n = 381$ болсо, анда n ди, b_n ди;

в) $b_1 = 4; b_n = 1024, S_n = 2044$ болсо, n жана q ну;

г) $b_3 = 20; n = 3, S_n = 35$ болсо, анда q жана b_1 ди тапкыла.

Чыгаруу: а) $q = 3, n = 6, S_n = 364$

b_6 ны табабыз: $b_6 = b_1 \cdot 3^{6-1} = b_1 \cdot 3^5$; $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ формуласы боюнча $S_6 = \frac{b_6 \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1 \cdot 3^5 \cdot 3 - b_1}{3-1} = \frac{729b_1 - b_1}{2}$;

$\frac{728b_1}{2} = 364$, $728b_1 = 728$, $b_1 = 1.$

Демек, $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 1 \cdot 3^3 = 27.$

Жообу: $b_1 = 1, b_4 = 27.$

б) $b_1 = 3; q = 2, S_n = 381.$

$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ формуласын пайдаланып b_n ди таап алабыз.

$\frac{b_n \cdot 2 - 3}{2-1} = 381$, $b_n \cdot 2 - 3 = 381$, $2b_n = 384$, $b_n = 192.$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ формуласы боюнча n ди табабыз

$3 \cdot 2^{n-1} = 192$, $2^{n-1} = 192:3$, $2^{n-1} = 64$, $2^{n-1} = 2^6$,

$n - 1 = 6$, $n = 7$

Жообу: $b_n = 192, n = 7.$

в) $b_1 = 4; b_n = 1024;\ n-?\quad q-?$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ формуласын пайдаланабыз.

$$4 \cdot q^{n-1} = 1024\,,\quad q^{n-1} = 256\,,\quad q^{n-1} = 2^8$$

демек, $q = 2, n-1 = 8\,,\quad n = 9$

Жообу: $q = 2, n = 9$.

г) $b_3 = 20; n = 3, S_n = 35, q-?$ жана $b_1-?$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ формуласы боюнча

$b_3 = b_1 \cdot q^2\,,\quad b_1 \cdot q^2 = 20$ теңдемесин алабыз.

$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ формуласы боюнча

$$S_3 = \frac{b_3 \cdot q - b_1}{q-1}$$

$\frac{20 \cdot q - b_1}{q-1} = 35$ теңдемесин алабыз. Демек, төмөндөгүдөй теңдемелер системасын түзүүгө болот.

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^2 = 20 \\ \dfrac{20 \cdot q - b_1}{q-1} = 35, \end{cases} \begin{cases} b_1 = \dfrac{20}{q^2} \\ 20q - b_1 = 35(q-1), \end{cases}$$

$$20q - \frac{20}{q^2} = 35(q-1)$$

$$20q^3 - 20 = 35q^3 - 35q^2$$

$$35q^3 - 35q^2 - 20q^3 + 20 = 0$$

$$15q^3 - 35q^2 + 20 = 0$$

$$15q^3 - 15q^2 - 20q^2 + 20 = 0$$

$$15q^2(q-1) - 20(q^2-1) = 0$$

$$(q-1)(15q^2 - 20(q-1)) = 0$$

$$q - 1 = 0\,,\quad q_1 = 1$$

$15q^2 - 20q - 20 = 0$ (5ке бөлүп жиберебиз)

$$3q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D = 16 + 48 = 64$$

$q_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6};\ q_2 = \frac{4+8}{6} = 2;\qquad q_3 = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}.$

$q_1 = 1, q_2 = 2; q_3 = -\frac{2}{3}$ тамырларынын ичинен $q_2 = 2$ чыгарылыш болот.

$b_1 = \frac{20}{2^2} = \frac{20}{4} = 5.$

Жообу: $b_1 = 5;\ q = 2.$

68. Геометриялык прогрессия $n-$ мүчөсүнүн формуласы аркылуу берилген. $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, S_4 тү тапкыла.

Чыгаруу: $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$; $b_1 = 2 \cdot 3^{1-1} = 2 \cdot 3^0 = 2$;

$b_2 = 2 \cdot 3^{2-1} = 2 \cdot 3^1 = 6$ демек, $b_1 = 2$, $b_2 = 6$.

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{6}{2} = 3$ демек, $q = 3$.

$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ формуласы боюнча

$$S_4 = \frac{2 \cdot (3^4 - 1)}{3-1} = \frac{2(81-1)}{2} = 80$$

Жообу: $S_4 = 80$.

69. Берилген чексиз кемүүчү прогрессиянын ар биринин суммасын тапкыла.

а) $4, 1, \frac{1}{4}, \ldots$; б) $-2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$.

Чыгаруу: $S = \frac{b_1}{1-q}$ формуласын пайдаланабыз.

а) $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{4}$, $S = \frac{4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$;

б) $b_1 = -2$, $q = -\frac{1}{2}$, $S = \frac{-2}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = \frac{-4}{3} = -1\frac{1}{3}$;

Жообу: а) $S = 5\frac{1}{3}$; б)$S = -1\frac{1}{3}$.

70. Эгер: $q = \frac{1}{9}$, $b_3 = \frac{1}{27}$ болсо, анда бул чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасын тапкыла.

Чыгаруу: $q = \frac{1}{9}$, $b_3 = \frac{1}{27}$,

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ формуласын пайдаланып, b_1 ди таап алабыз.

$$b_1 \cdot q^2 = \frac{1}{27}, \quad b_1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{27}, \quad b_1 \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{27}, \quad b_1 = \frac{1}{27} : \frac{1}{81},$$

$b_1 = \frac{1}{27} \cdot \frac{81}{1} = 3$ демек, $b_1 = 3$

$S = \frac{3}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{\frac{8}{9}} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$.

Жообу: $3\frac{3}{8}$.

71. Мезгилдүү чексиз ондук бөлчөктүн ар бирин жөнөкөй бөлчөк түрүндө жазгыла.

а) 0,4545... б) 0,7777...

Чыгаруу: 0,4545... чексиз мезгилдүү бөлчөктүн жакындатылган маанилеринин удаалаштыгын жазабыз.

$a_1 = 0{,}45,$

$a_2 = 0{,}4545 = 0{,}45 + 0{,}0045 = 0{,}45 + 0{,}45(0{,}01)$

$a_3 = 0{,}454545 = 0{,}45 + 0{,}45(0{,}01) + 0{,}45(0{,}01)^2$

Бул жакындатылып жазылган мезгилдүү бөлчөктөр биринчи мүчөсү 0,45, бөлүмү 0,01 болгон чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасы болот.

Демек, $b_1 = 0{,}45$, $q = 0{,}01$

$$S = \frac{0{,}45}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}45}{0{,}99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

Жообу: $\frac{5}{11}$ бөлчөгү.

б) 0,7777... бул бөлчөктүн жакындатылган маанилеринин удаалаштыгын жазабыз.

$a_1 = 0{,}7,$

$a_2 = 0{,}77 = 0{,}7 + 0{,}07 = 0{,}7 + 0{,}7(0{,}1)$

$a_3 = 0{,}777 = 0{,}7 + 0{,}7(0{,}1) + 0{,}7(0{,}1)^2$ бул сумма биринчи мүчөсү 0,7, ал эми бөлүмү 0,1 болгон чексиз геометриялык прогрессиянын суммасы болот.

$b_1 = 0{,}7$, $q = 0{,}1$

$$S = \frac{0{,}7}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}7}{0{,}9} = \frac{7}{9}$$

Жообу: $\frac{7}{9}$.

72. Төмөнкү барабардыктын тууралыгын математикалык индукция методу менен далилдегиле.

$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$ (1)

Далилдөө. 1) $n = 1$ болгондо (1) формуласы туура:

$$1 = 1(2 \cdot 1 - 1)$$

2)Эгер k натуралдык саны үчүн (1) формуласы туура болсо, анда ал $k + 1$ үчүн да туура, б.а.

$1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) = k(2k - 1)(2)$

туура барабардыгынан

$1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) + (4(k + 1) - 3) =$

$= (k + 1)(2(k + 1) - 1) = (k + 1)(2k + 1)$

келип чыга тургандыгын далилдейли. (2) барабардыктын эки жагына тең $4k+1$ санын кошобуз.

$$1+5+9+\cdots+(4k-3)+(4k+1) = k(2k-1)+(4k+1)$$

$$k(2k-1)+(4k+1)=2k^2-k+4k+1=2k^2+3k+1=$$

$$=2k^2+2k+k+1=2k(k+1)+(k+1)=(k+1)(2k+1)$$

Ошентип, (1) барабардыктын тууралыгы далилденди.

IV глава. Рационалдык көрсөткүчтүү даража

4.1. Бүтүн көрсөткүчтүү даража жана анын касиеттери

Натуралдык көрсөткүчтүү даражанын бардык касиеттери бүтүн көрсөткүчтүү даража үчүн да сакталат.

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^n)^m = a^{nm}$;

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

5) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Мында, $n \in z$, $m \in z$ жана $0 \neq a \in R$, $0 \neq b \in R$.

1-аныктама. Эгерде $0 \neq a \in R$, $n \in N$болсо, анда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$болот.

Мисалдар:

1)$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; 2)$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$

2-аныктама. Эгерде $0 \neq a \in R$ болсо анда $a^0 = 1$. мында, $a \neq 0$.

Мисалдар:

1) $7^0 = 1$ 2)$(-0{,}81)^0 = 1$ 3)$8132^0 = 1$

Бүтүн көрсөткөчтүү даражанын касиеттерин колдонуу менен аткарылуучу мисалдар.

1-мисал. Туюнтмалардын маанилерин тапкыла.

а) $3^2 \cdot 3^{-18} \cdot 3^{20}$ г) $(2^3)^4 : (2^2)^5$

б) $2^{18} : 2^{16} \cdot 2^{-2}$ д) $(5 \cdot 3)^4 \cdot (5 \cdot 3)^{-2}$

в) $(\frac{2}{3})^5 : \frac{2^5}{3^5}$ е) $3^3 \cdot 27^{-1} \cdot 632$

Чыгаруу: а) $3^2 \cdot 3^{-18} \cdot 3^{20} = 3^{2+(-18)+20} = 3^4 = 81$

б) $2^{18} : 2^{16} \cdot 2^{-2} = 2^{18-16+(-2)} = 2^0 = 1$

в) $(\frac{2}{3})^5 : \frac{2^5}{3^5} = \frac{2^5}{3^5} \cdot \frac{3^5}{2^5} = 1$

г) $(2^3)^4 : 2^2)^5 = 2^{12} : 2^{10} = 2^{12-10} = 2^2 = 4$

д) $(5 \cdot 3)^4 \cdot (5 \cdot 3)^{-2} = (5^4 \cdot 3^4) \cdot (5^{-2} \cdot 3^{-2}) = \frac{5^4 \cdot 3^4}{5^2 \cdot 3^2} =$

$= 25 \cdot 9 = 225$

е) $3^3 \cdot 27^{-1} \cdot 632 = 3^3 \cdot (3^3)^{-1} \cdot 632 = 3^3 \cdot 3^{-3} \cdot 632 = 3^0 \cdot 632 = 1 \cdot 632 = 632$.

2-мисал. Жөнөкөйлөткүлө.

а) $(ax^3 + bx^2 - cx) \cdot x^{-3}$;

б) $(x^3 + x^{-2} + x^{-1}): x^{-2}$;

в) $(2x - 5x^{-1})(5x + 2x^{-1})$;

г) $(3m^2 - 2m - 5 - 3m^{-1}): (2m + m^0 - m^{-1})$

Чыгаруу: а) $(ax^3 + bx^2 - cx) \cdot x^{-3} = ax^3 \cdot x^{-3} + bx^2x^{-3} - cxx^{-3} = ax^0 + bx^{-1} - cx^{-2} = a + bx^{-1} - cx^{-2}$;

б) $(x^3 + x^{-2} + x^{-1}): x^{-2} = x^3: x^{-2} - x^{-2}: x^{-2} + x^{-1} \cdot x^{-2} = = x^5 - x^0 + x = x^5 + x - 1$;

в) $(2x - 5x^{-1})(5x + 2x^{-1}) = 10x^2 - 4x \cdot x^{-1} - 25x^{-1} \cdot x + +10x^{-1} \cdot x^{-1} = 10x^2 - 4 - 25 + 10x^{-2} = 10x^2 + 10x^{-2} - 29$

г) $(3m^2 - 2m - 5 - 3m^{-1}): (2m + m^0 - m^{-1}) =$

$$\left(3m^2 - 2m - -5 - \frac{3}{m}\right): \left(2m + 1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{3m^3 - 2m^2 - 5m - 3}{m}: \frac{2m^2 + m - 1}{m} =$$

$$= \frac{3m^3 - 2m^2 - 5m - 3}{m} \cdot \frac{m}{2m^2 + m - 1} = \frac{3m^3 - 2m^2 - 5m - 3}{2m^2 + m - 1}.$$

Силерге белгилүү сандын стандарттык түрү $a \cdot 10^n$түрүндө жазылат.

Мында a – сандын мантиссасы, n – сандын тартиби деп аталат. $1 \le |a| \le 10,\ n \in z$

Сандарды стандарттык түрдө жазууда бүтүн көрсөткүчтүү даражанын касиеттери колдонулат.

3-мисал. Санды стандарттык түрдө жазгыла.

а) 1000000; в) $\frac{1}{125}$;

б) 0,00000035; г) $(0{,}002)^{-2}$;

д) 0,000001.

Чыгаруу: $a \cdot 10^n$формуласын колдонобуз мында

$$1 \le a \le 10,\ n \in z.$$

а) $1000000 = 10^6$;

б) $0{,}00000035 = 3{,}5 \cdot 0{,}0000001 = 3{,}5 \cdot 10^{-7}$

в) $\frac{1}{125} = 0{,}008 = 8 \cdot 0{,}001 = 8 \cdot 10^{-3}$;

г) $(0{,}002)^{-2} = (2 \cdot 0{,}001)^{-2} = (2 \cdot 10^{-3})^{-2} = 2^{-2} \cdot 10^{6} =$

$= \frac{1}{2^2} \cdot 10^6 = \frac{1}{4} \cdot 10^6 = 0{,}25 \cdot 10^6 = 2{,}5 \cdot 10^5$;

д) $0{,}000001 = 10^{-6}$

4.2. *n* – даражалуу тамыр жана анын негизги касиеттери

Аныктама

Берилген $a \in R$санынын n – даражалуу тамыры деп, n – даражасы a га барабар сан аталат жана радикалдын жардамы менен $\sqrt[n]{a}$деп белгиленет.

Демек,

$$n = 2 \text{ болгондо } \sqrt{a} - \text{ квадрат тамыр}$$

$$n = 3 \text{ болгондо } \sqrt[3]{a} - \text{ куб тамыр}$$

$n = 4$ болгондо $\sqrt[4]{a}$ – төртүнчү даражалуу тамыр.

Радикалдагы *n* саны радикалдын даражасы деп аталат.

Мисалы: $\sqrt[9]{a} - a$ нын 9 – даражадагы радикалы деп аталат.

Аныктама боюнча

$(\sqrt[n]{a})^n = a$. бул барабардык n–даражалуу тамырдын тууралыгын текшерүүдө колдонулат.

Мисалдар: $\sqrt[10]{1024} = 2$, анткени $2^{10} = 1024$.

$\sqrt[3]{3{,}375} = 1{,}5$, анткени $(1{,}5)^3 = 3{,}375$.

Эгерде n–даражалуу тамырда *n* жуп сан болсо, б.а. *n*=2k, $k \in N$ болсо, анда $0 < a \in R$ үчүн $\sqrt[2k]{a}, -\sqrt[2k]{a}$ деген эки тамыр, $n = 2k + 1$, $k \in N$ үчүн каалагандай $a \in R$үчүн $\sqrt[2k+1]{a}$ бир гана *n*–даражалуу тамыр болот.

Мисалдар:$\sqrt{9} = 3$, $-\sqrt{9} = -3$, $\sqrt[4]{81} = 3$,

$-\sqrt[4]{81} = -3$, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Натуралдык *n* – даражалуу тамырдын негизги касиети.

Эгерде тамырдын даражасын жана тамыр астындагы туюнтманын даражасын бирдей натуралдык санга көбөйтсөк же бөлсөк, анда натуралдык *n* – даражалуу тамырдын чоңдугу өзгөрбөйт.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}}.$$

мында $k \in N, \ m \in z, \ a > 0$.

Мисалы: $\sqrt[5]{7^{10}} = \sqrt[15]{7^{30}} = \sqrt{7^2} = 7$.

1-*мисал.* a санын n – даражалуу тамырын тапкыла.

а) $a = 22, \ n = 7$; в) $a = -15$; $n = 9$

б) $a = 199$, $n = 14$; г) $a = -8$, $n = 3$.

Чыгаруу:

а) $a = 22, \ n = 7; \ \sqrt[7]{22}$; в) $a = -15; \ n = 9, \ \sqrt[9]{-15}$

б) $a = 199, \ n = 14, \ \sqrt[14]{199}$; г) $a = -8, \ n = 3, \ \sqrt[3]{-8}$.

2-мисал. Теңдемени чыгаргыла.

а) $x^2 = 676$ в) $(x-5)^3 = -343$

б) $(x-3)^2 = 225$ г) $(x^2+4)^4 = 625$

Чыгаруу:

а) $x^2 = 676$

$x = \pm\sqrt{676}$

$x_1 = 26$,

$x_2 = -26$

Жообу: $x_1 = 26, \ x_2 = -26$

б) $(x-3)^2 = 225$

$x - 3 = \pm\sqrt{225}$

$x - 3 = 15$

$x = 15 + 3 = 18$

$x - 3 = -15$

$x = -15 + 3 = -12$

демек, $x_1 = 18, \ x_2 = -12$

Жообу: $x_1 = 18, \ x_2 = -12$.

в) $(x-5)^3 = -343$

$x - 5 = \sqrt[3]{-343}$

$x - 5 = -7$

$x = -7 + 5$

$x = -2$.

Жообу: $x_1 = -2$.

г) $(x^2+4)^4 = 625$

$(x^2+4)^4 = \pm\sqrt[4]{625}$

$x^2 + 4 = \pm 5$

1) $x^2 + 4 = 5$

$x^2 = 5 - 4 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$

2) $x^2 + 4 = -5$

$x^2 = -5 - 4 = -9$

$x^2 = -9$ бул теңдеме чечимге ээ болбойт.

Жообу: $x_1 = 1, \ x_2 = -1$

4.3. n – даражалуу арифметикалык тамыр жана анын касиеттери

Аныктама.

Терс эмес aсанын натуралдык $n-$ даражалуу арифметикалык тамыры деп, n – даражадасы aга барабар болгон, терс эмес сан аталат.

Мисалы, $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[4]{16}=2$ демек, 3 жана 2 сандары арифметикалык тамыр болот.

Эскертүү. Терс сандын так даражалуу тамырын ошол эле даражадагы арифтетикалык тамыр аркылуу туюнтууга болот.

Бул учурда арифетикалык тамырдын алдында минус белгиси коюлат.

Мисалы,$\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-4$; $\sqrt[7]{-5}=-\sqrt[7]{5}$;

Жалпы учурда $a\in R$үчүн: $|a|=\begin{cases}\text{Эгерде } a\geq 0 \text{ болсо}, a\\ \text{Эгерде } a<0 \text{ болсо}, -a.\end{cases}$

Экендигин эске алсак, анда $a<0$жана $n=2k+1,\ k\in n$, б.а. n так натуралдык сан болгон учурда

$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}$болот.

Мисалы, $\sqrt[5]{2-\sqrt{11}}=-\sqrt[5]{-(2-\sqrt{11}}=-\sqrt[5]{\sqrt{11}-2}$.

N – даражалуу арифметикалык тамыр төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот.

1-касиет. Эгерде $a\geq 0$, $b\geq 0$ болсо, анда натуралдык $n\geq 2$ саны үчүн $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ (1) барабардыгы орун алат.

Мисалы, $\sqrt[5]{7\cdot 9}=\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[5]{9}$;

2-касиет. Эгерде $a\geq 0$, $b\geq 0$ болсо, анда натуралдык $n\geq 2$ үчүн $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (2) барабардыгы орун алат.

Мисалы, $\sqrt[9]{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[9]{2}}{\sqrt[9]{3}}$;

3-касиет. Эгерде $a\geq 0$болсо, анда натуралдык $n\geq 2$жана натуралдык $m\geq 2$сандары үчүн $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (8) барабардыгы орун алат.

Мисалы, $(\sqrt[4]{a})^7=\sqrt[4]{a^7}$;

4-касиет. Эгерде $a \geq 0$болсо, анда натуралдык $n \geq 2$ жана натуралдык $m \geq 2$сандарыүчүн

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ (4)

барабардыгы орун алат.

Мисалы, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{9}} = \sqrt[15]{9}$

5-касиет.Эгерде $a \geq 0$болсо, анда натуралдык $n \geq 2$, натуралдык $k \geq 2$жана натуралдык $m \geq 2$сандарыүчүн

$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ (5)

барабардыгы орун алат.

Мисалы, $\sqrt[20]{7^{15}} = \sqrt[4]{7^3}$.

1-мисал. Төмөнкү сандардын арифметикалык квадрат тамырын тапкыла.

9; 25; 0,36; 121; 0,04;$\frac{36}{169}$; $\frac{49}{324}$.

Чыгаруу: $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$; $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$; $\sqrt{\frac{36}{169}} = \frac{6}{13}$; $\sqrt{\frac{49}{324}} = \frac{7}{18}$.

2-мисал. Төмөнкү сандардын арифметикалык куб тамырын тапкыла.

0; 1; 64; 0,008; 0,027; $\frac{1}{125}$; $\frac{216}{343}$.

Чыгаруу: $\sqrt[3]{0} = 0$; $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$; $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$; $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$; $\sqrt[3]{\frac{216}{343}} = \frac{3}{7}$.

3-мисал. Төмөнкү сандардын арифметикалык 4-даражалуу тамырын тапкыла.

0; 1; 16; 256; 0,0081; 0,0625; $\frac{16}{625}$.

Чыгаруу: $\sqrt[4]{0} = 0$; $\sqrt[4]{1} = 1$; $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[4]{256} = 4$;

$$\sqrt[4]{0{,}0081} = 0{,}3; \sqrt[4]{0{,}0625} = 0{,}5; \sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{2}{5}.$$

4-мисал. Төмөнкү сандардын 12-даражалуу арифметикалык тамырын тапкыла.

0; 1; 2^{12}; 7^{24}; 5^{36}; 3^{48}.

Чыгаруу: $\sqrt[12]{0} = 0$; $\sqrt[12]{1} = 1$; $\sqrt[12]{2^{12}} = 2$

$\sqrt[12]{7^{24}} = 7^2 = 49$; $\sqrt[12]{5^{36}} = 5^3 = 125$; $\sqrt[12]{3^{48}} = 3^4 = 81$.

5-мисал. Эсептегиле.

а) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[5]{243} + \sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[3]{0{,}001} + 3\sqrt[4]{81}$;

б) $\sqrt[3]{-343} - \sqrt[3]{125}$; г) $\sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{0{,}0001} + \sqrt{121}$

Чыгаруу: а) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[5]{243} + \sqrt[4]{625} = \frac{1}{3} \cdot 3 + 5 = 1 + 5 = 6$;

б) $\sqrt[3]{-343} - \sqrt[3]{125} = -7 - 5 = -12$;

в) $\sqrt[3]{0{,}001} + 3\sqrt[4]{81} = 0{,}1 + 3 \cdot 3 = 0{,}1 + 9 = 9{,}1$;

г) $\sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{0{,}0001} + \sqrt{121} = -2 - 0{,}1 + 11 = 8{,}9$.

6-мисал. Терс сандын n–даражалуу тамырын анын n – даражалуу арифметикалык тамыры аркылуу туюнткула:

а) $\sqrt[5]{-32}$; г) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{10}}$;

б) $\sqrt[3]{-17}$; д) $\sqrt[5]{3 - x},\ x > 3$;

в) $\sqrt[91]{-5}$; е) $\sqrt[7]{(5 - y)^7}\ \ y > 5$.

Чыгаруу:

$a < 0$, $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$ формуласынын негизинде.

а) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$

б) $\sqrt[3]{-17} = -\sqrt[3]{17}$;

в) $\sqrt[91]{-5} = -\sqrt[91]{5}$;

г) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{10}} = \sqrt[3]{-(\sqrt{10} - 2)} = -\sqrt[3]{\sqrt{10} - 2}$;

д) $\sqrt[5]{3 - x} = \sqrt[5]{-(x - 3)} = -\sqrt[5]{x - 3}$;

е) $\sqrt[7]{(5 - y)^7} = \sqrt[7]{-(y - 5)^7} = -\sqrt[7]{(y - 5)^7} = -(y - 5)$.

7-мисал. Эсептегиле.

а) $a < b$, $\sqrt{(a - b)^2} = -\sqrt{(b - a)^2} = b - a$;

б) $b > c$, $\sqrt[4]{(b - c)^4} = b - c$;

в) $x < y$, $\sqrt[3]{(x - y)^3} = \sqrt[3]{-(y - x)^3} = -|y - x|$;

г) $x > y$, $\sqrt[3]{(x - y)^3} = x - y$;

8-мисал. Көбөйтүндүдөн жана бөлчөктөн тамыр чыгаргыла.

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$;

б) $\sqrt[5]{\frac{32}{0{,}00001}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{0{,}00001}} = \frac{2}{0{,}1} = 20$;

9-мисал. Тамырды даражага көтөргүлө.

а) $(\sqrt[3]{5})^6 = \sqrt[3]{5^6} = 5^2 = 25;$

б) $(\sqrt[8]{(a^2+7)})^{16} = \sqrt[8]{(a^2+7)^{16}} = (a^2+7)^2.$

10-мисал. Тамырдан тамыр чыгаргыла.

а) $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$

б) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{2^{40}}} = \sqrt[20]{2^{40}} = 2^2 = 4.$

4.1.–4.3. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

73. Жөнөкөйлөткүлө.

а) $(x-2x^{-1})(2x-x^{-1});$

б)$(2a^{-2}-3a^{-1}+a^0)(a^2-a);$

в) $(m^2-n^2)(m^{-1}+n^{-1});$

г) $(3x^2-2x-3+2x^{-1}):(x+2-x^{-1});$

Чыгаруу:

а) $(x-2x^{-1})(2x-x^{-1}) = 2x^2 - x\cdot x^{-1} - 4x^{-1}\cdot x^{-1} +$
$+ 2x^{-1}\cdot\cdot x^{-1} = 2x^2 - -1 - 4 + 2x^{-2} = 2x^2 + 2x^{-2} - 5;$

б) $(2a^{-2}-3a^{-1}+a^0)(a^{-2}-a) = 2a^{-2}\cdot a^{-2} - 2a^{-2}\cdot a -$
$- 3a^{-1}\cdot\cdot a^{-2} + 3a^{-1}\cdot a + a^{-2} - a = 2a^{-4} - 2a^{-1} - 3a^{-3} +$
$+ 3 + a^{-2} - a = 2a^{-4} - 3a^{-3} + a^{-2} - 2a^{-1} - a + 3;$

в) $(m^2-n^2)(m^{-1}+n^{-1}) = (m^2-n^2)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) =$
$=(m-n)(m++n)\cdot\frac{n+m}{mn} = \frac{(m-n)(m+n)^2}{mn};$

г) $(3x^2-2x-3+2x^{-1}):(x+2+x^{-1}) =$

$$= \left(3x^2-2x-3+\frac{2}{x}\right):\left(x+2+\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{3x^x-2x^2-3x+2}{x}:\frac{x^2+2x+1}{x} =$$

$$= \frac{(3x-2)(x^2-1)}{x}\cdot\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{(3x-2)(x-1)}{x+1};$$

74. Жөнөкөйлөткүлө.

а) $(a^3 + a^{-3})^2 + a^6 - a^{-6}$;   в) $[(-\frac{x}{y})^{-5}]^{-1}$

б) $(m^{-3} + n^{-4})(m^{-3} - n^{-4})$;   г) $(-c^4)^{-3} + (-1)^{2n} + (-1)^{2n-1}$;

Чыгаруу:

а) $(a^3 + a^{-3})^2 + a^6 - a^{-6} = a^6 + 2a^3 \cdot a^{-3} + a^{-6} + a^6 - a^{-6} =$
$= 2a^6 + 2a^0 = 2a^6 + 2.$

б) $(m^{-3} + n^{-4})(m^{-3} - n^{-4}) = (m^{-3})^2 - (n^{-4})^2 = m^{-6} - n^{-8}$;

в) $[(-\frac{x}{y})^{-5}]^{-1} = (-\frac{x^{-5}}{y^{-5}})^{-1} = -\frac{x^5}{y^5}$;

г) $(-c^4)^{-3} + (-1)^{2n} + (-1)^{2n-1} = -c^{-12} + 1 - 1 = -\frac{1}{c^{12}}$;

75. Теңдемени чыгаргыла.

а) $x^2 = 121$;   в) $(x^2 - 4)^3 = 125$;

б) $(x + 1)^6 = 64$;   г) $(x^2 - 4x)^3 = 27$.

Чыгаруу:

а) $x^2 = 121,$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{121},$

$x_1 = 11,$

$x_2 = -11.$

Жообу: $x_1 = 11,\ x_2 = -11,$

в) $(x^2 - 4)^3 = 125$

$x^2 - 4 = \sqrt{125}$

$x^2 - 4 = 5$

$x^2 = 9$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{9}$

$x_1 = 3,\ x_2 = -3.$

Жообу: $x_1 = 3;\ \ x_2 = -3$;

б) $(x + 1)^6 = 64$

$x + 1 = \pm\sqrt[6]{64},$

$x + 1 = 2,\quad x + 1 = -2$

$x = 2 - 1,\ x = -2 - 1$

$x = 1\qquad x = -3$

Жообу: $x_1 = 1\ x_2 = -3$;

г) $(x^2 - 4x)^3 = -27$

$x^2 - 4x = -\sqrt[3]{27}$

$x^2 - 4x = -3$

$x^2 - 4x + 3 = 0,\ D = 16 - 12 = 4$

$x_{1/2} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{4\pm2}{2},$

$x_1 = \frac{4 \pm 2}{2} = \frac{6}{2} = 3;\ \ x_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Жообу: $x_1 = 3;\ \ x_2 = 1.$

76. Арифметикалык тамырды тапкыла.

а) $\sqrt[6]{49^3}$;   в) $\sqrt[3]{(-\sqrt{3})^3}$;   д) $\sqrt[7]{(\sqrt{2} - 1)^7}$;

б) $\sqrt[9]{(\frac{1}{3})^{18}}$;   г) $\sqrt[4]{(-7)^4}$;   е) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$.

Чыгаруу:

а) $\sqrt[6]{49^3} = \sqrt{49} = 7$;

в) $\sqrt[3]{(-\sqrt{3})^3} = -\sqrt[3]{(\sqrt{3})^3} = -\sqrt{3}$

б) $\sqrt[9]{(\frac{1}{3})^{18}} = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$;

г) $\sqrt[4]{(-7)^4} = |-7| = 7$;

д) $\sqrt[7]{(\sqrt{2}-1)^7} = \sqrt{2} - 1$;

е) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = \sqrt{(\sqrt{5-1})^2} =$
$= \sqrt{5} - 1$.

77. Төмөнкүнү далилдегиле.

$$5x - \sqrt{(x-7)^2} = \begin{cases} 4x + 7, & \text{эгерде } x > 7 \text{ болсо,} \\ 6x - 7, & \text{эгерде } x < 7 \text{ болсо,} \\ 5x \quad , & \text{эгерде } x = 7 \text{ болсо,} \end{cases}$$

Далилдөө.

1) Эгерде $x > 7$болсо, анда $5x - \sqrt{(x-7)^2} = 5x - (x-7) =$
$= 5x - x + 7 = 4x + 7$ болот;

2) Эгерде $x < 7$ болсо, анда $5x - \sqrt{(x-7)^2} = 5x - \sqrt{(7-x)^2} =$
$= 5x - 7 + x = 6x - 7$болот;

3) Эгерде $x = 7$болсо, анда $5x - \sqrt{(x-7)^2} = 5x - \sqrt{0} = 5x$болот.

78. Эсептегиле.

а) $0{,}8\sqrt[4]{625} + \frac{1}{7} \cdot \sqrt[3]{-343}$;   в) $\sqrt[15]{(\sqrt{32} - \sqrt{2})^{30}}$.

б) $\sqrt{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt{10 + \sqrt{19}}$;   г) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;

Чыгаруу:

а) $0{,}8 \cdot \sqrt[4]{625} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{-343} = 0{,}8 \cdot 5 + \frac{1}{7} \cdot (-7) = 4 - 1 = 3$;

б) $\sqrt{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt{10 + \sqrt{19}} = \sqrt{(10 - \sqrt{19}) \cdot (10 - \sqrt{19})} =$
$= \sqrt{10^2 - (\sqrt{19})^2} = \sqrt{100 - 19} = \sqrt{81} = 9$

в) $\sqrt[15]{\sqrt{(32-\sqrt{2})^{30}}} = (\sqrt{32}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{32})^2 - 2\sqrt{32}\cdot\sqrt{2} +$

$+(\sqrt{2})^2 = 32 - 2\sqrt{64} + 2 = 34 - 2\cdot 8 = 34 - 16 = 18;$

г) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} =$

$= \frac{(\sqrt{7})^2+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{7+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+3+7-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+3}{7-3} =$

$= \frac{20}{4} = 5.$

79. Көбөйтүндүдөн тамыр чыгаргыла.

а) $\sqrt{36\cdot 25}$; г) $\sqrt[3]{0{,}001\cdot 125\cdot 343}$;

б) $\sqrt{16\cdot 49\cdot 121}$; д) $\sqrt[4]{81\cdot 0{,}0001\cdot 625}$;

в) $\sqrt[5]{0{,}00001\cdot 32}$; е) $\sqrt[3]{(\sqrt{10}-1)^3(\sqrt{10}+1)^3}$.

Чыгаруу: а) $\sqrt{36\cdot 25} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{25} = 6\cdot 5 = 30;$

б) $\sqrt{16\cdot 49\cdot 121} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{49}\cdot\sqrt{121} = 4\cdot 7\cdot 11 = 308;$

в) $\sqrt[5]{0{,}00001\cdot 32} = \sqrt[5]{0{,}00001}\cdot\sqrt[5]{32} = 0{,}1\cdot 2 = 0{,}2;$

г) $\sqrt[3]{0{,}001\cdot 125\cdot 343} = \sqrt[3]{0{,}001}\cdot\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{343} = 0{,}1\cdot 5\cdot 7 = = 3{,}5;$

д) $\sqrt[4]{81\cdot 0{,}0001\cdot 625} = \sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{0{,}0001}\cdot\sqrt[4]{625} = 3\cdot 0{,}1\cdot 5 = 1{,}5;$

е) $\sqrt[3]{(\sqrt{10}-1)^3(\sqrt{10}+1)^3} = \sqrt[3]{((\sqrt{10}-1)(\sqrt{10}+1))^3} =$

$= \sqrt[3]{((\sqrt{10})^2-1^2)^3} = \sqrt[3]{(10-1)^3} = \sqrt[3]{9^3} = 9.$

80. Бөлчөктөн тамыр чыгаргыла.

а) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; в) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; д) $\sqrt[5]{-\frac{243}{0{,}0032}}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{27}{0{,}001}}$; г) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; е) $\sqrt[3]{-\frac{0{,}008}{0{,}027}}$.

Чыгаруу: а) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$; б) $\sqrt[3]{\frac{27}{0{,}001}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{0{,}001}} = \frac{3}{0{,}1}$;

в) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3}$; г) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = -\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$;

д) $\sqrt[5]{-\frac{243}{0{,}0032}} = -\sqrt[5]{\frac{243}{0{,}00032}} = -\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt{0{,}00032}} = \frac{3}{0{,}2} = 15$;

е) $\sqrt[3]{-\frac{0{,}008}{0{,}027}} = -\sqrt[3]{\frac{0{,}008}{0{,}027}} = -\frac{\sqrt[3]{0{,}008}}{\sqrt{0{,}027}} = -\frac{0{,}2}{0{,}3} = -\frac{2}{3}$.

81. Тамырды даражага көтөргүлө.

а) $(\sqrt[5]{3})^{10}$; в) $(\sqrt[3]{2\sqrt{5}})^{6}$;

б) $(\sqrt[20]{5})^{60}$; г) $(3\sqrt{2})^{3}$.

Чыгаруу: а) $(\sqrt[5]{3})^{10} = \sqrt[5]{3^{10}} = 3^2 = 9$;

б) $(\sqrt[20]{5})^{60} = 5^3 = 125$;

в) $(\sqrt[3]{2\sqrt{5}})^6 = \sqrt[3]{(2\cdot\sqrt{5})^6} = (2\cdot\sqrt{5})^2 = 4\cdot 5 = 20$;

г) $(3\sqrt{2})^3 = 3^3\cdot\sqrt{2^3} = 27\cdot\sqrt{8}$.

82. Тамырдан тамыр чыгаргыла.

а) $\sqrt{\sqrt[4]{216}}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{15}}}$; д) $\sqrt[10]{\sqrt[4]{3^{80}}}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}$; г) $\sqrt[6]{x\sqrt[5]{x}}$; е) $\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$.

Чыгаруу:

а) $\sqrt{\sqrt[4]{216}} = \sqrt{4} = 2$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[3]{8} = 2$;

в) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{15}}} = \sqrt[5]{a^5} = a$; г) $\sqrt[6]{x\sqrt[5]{x}} = \sqrt[6]{\sqrt[5]{x^6}} = \sqrt[6]{(\sqrt[5]{x})^6} = \sqrt[5]{x}$;

д) $\sqrt[10]{\sqrt[4]{3^{80}}} = \sqrt[10]{3^{20}} = 3^2 = 9$;

е) $\sqrt[3]{7\sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{7^3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{7})^3} = \sqrt{7}$;

83. Эсептегиле.

а) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{9}$; г) $\sqrt[5]{7+\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7-\sqrt{17}}$;

б) $\sqrt[6]{3^9} \cdot \sqrt{27}$; д) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[6]{3^5}$;

в) $\sqrt[6]{2^3 \cdot 5^4} \cdot \sqrt[6]{8 \cdot 25}$; е) $(\sqrt[6]{4^3})^2 \cdot (\sqrt[8]{16})^{-4}$.

Чыгаруу: а) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{81 \cdot 9} = \sqrt[3]{729} = 9$;

б) $\sqrt[6]{3^9} \cdot \sqrt{27} = \sqrt[6]{3^9 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{3^{12}} = 3^2 = 9$;

в) $\sqrt[6]{2^3 \cdot 5^4} \cdot \sqrt[6]{8 \cdot 25} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 5^6} = 2 \cdot 5 = 10$;

г) $\sqrt[5]{7+\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7-\sqrt{17}} = \sqrt[5]{(7+\sqrt{17})(7-\sqrt{17})} =$

$$= \sqrt[5]{7^2 - (\sqrt{17})^2} = \sqrt[5]{49-17} = \sqrt[5]{32} = 2;$$

д) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[6]{3^5} = \sqrt[12]{(\sqrt[3]{9})^3} \cdot \sqrt[12]{3^{10}} = \sqrt[12]{9} \cdot \sqrt[12]{3^{10}} = \sqrt[12]{3^2 \cdot 3^{10}} =$

$= \sqrt[12]{3^{12}} = 3.$

г) $(\sqrt[6]{4^3})^2 \cdot (\sqrt[8]{16})^{-4} = 4 \cdot \sqrt{16^{-1}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$

84. Радикалды бирдей даражага келтирип, туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $\sqrt[4]{3^a} \cdot \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[12]{a^5}$;

б) $m^3 \cdot \sqrt{2m} \cdot \sqrt[4]{2m} \cdot \sqrt[8]{2m^2}$;

в) $\sqrt[12]{(a+b)^4} \cdot \sqrt[6]{(a^2-ab+b^2)^2}$;

г) $12mn\sqrt[10]{m^{12}n^4} : \frac{3m}{4m} \cdot \sqrt[5]{m^4n^3}$.

Чыгаруу: а) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[12]{a^5} = \sqrt[12]{a^9} \cdot \sqrt[12]{a^{10}} \cdot \sqrt[12]{a^5} =$

$$= \sqrt[12]{a^9 \cdot a^{10} \cdot a^5} = \sqrt[12]{a^{24}} = a^2;$$

б) $m^3 \cdot \sqrt{2m} \cdot \sqrt[4]{2m} \cdot \sqrt[8]{4m^2} = m^3\sqrt[8]{(2m)^4} \cdot \sqrt[8]{(2m)^2} \cdot \sqrt[8]{2^2 \cdot m^2} =$

$= m^3 \cdot \sqrt[8]{2^4m^4 \cdot 2^2 \cdot m^2 \cdot 2^2 \cdot m^2} = m^3 \cdot \sqrt[8]{2^8 \cdot m^8} = m^3 \cdot 2 \cdot m =$

$= 2m^4$;

в) $\sqrt[12]{(a+b)^4} \cdot \sqrt[6]{(a^2-ab+b^2)^2} = \sqrt[3]{a+b} \cdot \sqrt[3]{a^2-ab+b^2} =$

$$= \sqrt[3]{(a+b)(a^2-ab+b^2)} = \sqrt[3]{a^3+b^3};$$

г) $12mn\sqrt[10]{m^{12}n^4}:\frac{3m}{4n}\cdot\sqrt[5]{m^4n^3} = 12mn\sqrt[10]{m^{12}n^4}\cdot\frac{4n}{3m}\cdot\sqrt[10]{m^8n^6} =$
$= 16n^2\sqrt[10]{m^{12}\cdot n^4m^8n^6} = 16n^2\sqrt[10]{m^{20}\cdot n^{10}} = 16m^2n^3.$

85. Эсептегиле.

а) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{49})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7})$;

б) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} + \sqrt[5]{24}\cdot\sqrt[5]{1\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{\sqrt{64}}$;

в) $\frac{\sqrt[3]{75}\cdot\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{81}}$;

г) $\sqrt[3]{4\frac{1}{2}}:\sqrt[3]{1\frac{1}{3}}$.

Чыгаруу:

а) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{49})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7}) = \left((\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{7} +\right.$
$\left.+(\sqrt[3]{7})^2\right)(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7}) = (\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{7})^3 = 3 + 7 = 10;$

б) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} + \sqrt[5]{24}\cdot\sqrt[5]{1\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} + \sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{\frac{4}{3}} - \sqrt[3]{8} = \frac{4}{3} +$
$+\sqrt[5]{3}\cdot\frac{\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{3}} - 2 = 1\frac{1}{3} + \sqrt[5]{32} - 2 = 1\frac{1}{3} + 2 - 2 = 1\frac{1}{3};$

в) $\frac{\sqrt[3]{75}\cdot\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{81}} = \frac{\sqrt[3]{3\cdot25}\cdot\sqrt[3]{5\cdot27}}{\sqrt[3]{27\cdot3}} = \frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{125}\cdot3}{3\cdot\sqrt[3]{3}} = 5;$

г) $\sqrt[3]{4\frac{1}{2}}:\sqrt[3]{1\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}:\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$

4.4 Рационалдуу көрсөткүчтүү даража жана анын касиеттери

Аныктама

Эгерде – оң сан, $\frac{m}{n}$–бөлчөк сан болсо, $(m \in z, n \in n, m \geq 2)$анда $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ болот. (1) Мында a–негизги, $\frac{m}{n}$ бөлчөгү даража көрсөткүч деп аталат.

(1) формула менен оң сандын калагандай рационалдуу даражасы аныкталат.

Эгерде $\frac{m}{n} > 0$болсо, анда (1) барабардык a=0 болгон учурда да аныкталат: $\sqrt[n]{0^m} = 0^{\frac{m}{n}} = 0$.

a<0 болгондо (б.а. терс негиздер үчүн) бөлчөк көрсөткүчтүү даража каралбайт, Ошондой элеa=0 үчүн даража көрсөткүч терс боло албайт.

Мисалы, $(-3)^{\frac{5}{6}}$, $(-5)^{-\frac{3}{8}}$, $0^{-\frac{1}{3}}$ туюнтмалары мааниге ээ болбойт. Себеби,$(-3)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(-3)^5} = \sqrt[6]{-243}$, анык тамыр жок.

$(-5)^{-\frac{3}{8}} = \frac{1}{(-5)^{\frac{3}{8}}} = \frac{1}{\sqrt[8]{(-5)^3}} = \frac{1}{\sqrt[8]{-125}}$; анык тамыр жок.

$0^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{0^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0}$ бул аныкталбайт, анткени санды нөлгө бөлүүгө болбойт.

(1*) формуланы пайдаланып, тамырды рационалдык даража түрүндө, рационалдык даражаны тамыр түрүндө көрсөтүүгө болот.

1-мисал. Бөлчөк көрсөткүтүү даражаны тамыр менен алмаштыргыла.

а) $9^{\frac{5}{7}}$; в) $0{,}3^{0{,}5}$; д) $(x+y)^{\frac{3}{5}}$;

б) $5^{-\frac{1}{4}}$; г) $a^{1{,}6}$; е) $3x(x-y)^{-\frac{1}{7}}$.

Чыгаруу: а) $9^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{9^5}$;

б) $5^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$; в) $0{,}3^{0{,}5} = 0{,}3^{\frac{5}{10}} = 0{,}3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}3}$;

г) $a^{1{,}6} = a^{1\frac{6}{10}} = a^{\frac{16}{10}} = a^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{a^8}$;

д)$(x+y)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(x+y)^3}$;

е) $3x(x-y)^{-\frac{1}{7}} = 3x \cdot \frac{1}{(x-y)^{\frac{1}{7}}} = \frac{3x}{\sqrt[7]{x-y}}$.

2-мисал. Арифметикалык тамырды бөлчөк көрсөткүчтүү даража түрүндө жазгыла.

а) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt[3]{\frac{5}{19}}$; д) $\sqrt[6]{3(x^3-y^3)}$;

б) $\sqrt[7]{15^{-3}}$; г) $\sqrt[9]{0{,}5}$; е) $\sqrt[7]{|a|+|b|+3}$.

Чыгаруу:

а) $\sqrt{7}=7^{\frac{1}{2}}$; г) $\sqrt[9]{0,5}=0,5^{\frac{1}{9}}$;

б) $\sqrt[7]{15^{-3}}=15^{-\frac{3}{7}}$; д) $\sqrt[6]{3(x^3-y^3)}=(3(x^3-y^3)^{\frac{1}{6}}$;

в) $\sqrt[3]{\frac{5}{19}}=\left(\frac{5}{19}\right)^{\frac{1}{3}}$; е) $\sqrt[7]{|a|+|b|+3}=(|a|+|b|+3)^{\frac{1}{7}}$.

3-мисал. Эсептегиле.

а) $16^{\frac{1}{4}}$; б) $27^{-\frac{1}{3}}$; в) $1000^{\frac{1}{4}}$; г) $16^{\frac{3}{4}}$;

д) $(0,0001)^{-\frac{1}{4}}$; е) $128^{\frac{1}{7}}$; ж) $121^{\frac{1}{2}}$; з) $(0,064)^{-\frac{1}{3}}$.

Чыгаруу: а) $16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$;

б) $27^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{27^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{1}{3}$;

в) $1000^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10000}=10$;

г) $16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^3=8$;

д) $(0,0001)^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{(0,0001)^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{0,0001}}=\dfrac{1}{0,1}=10$;

е) $128^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{128}=2$;

ж) $121^{\frac{1}{2}}=\sqrt{121}=11$;

з) $(0,064)^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{(0,064)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{0,064}}=\dfrac{1}{0,4}=2,5$.

4-мисал. Туюнтма мааниге ээ болобу?

а) $7^{-\frac{1}{20}}$; в) $(-3)^{\frac{5}{4}}$ д) $0^{-\frac{4}{5}}$;

б) $0^{\frac{2}{3}}$; г) $(-3)^0$; е) $(-2)^5$.

Чыгаруу:

а) $7^{-\frac{1}{20}}$ туюнтмасы мааниге ээ болот. Анткени даражанын негизи 7 оң сан.

б) $0^{\frac{2}{3}}$ туюнтмасы мааниге ээ болот. Анткени даража көрсөткүч оң болгон учурда $0^{\frac{2}{3}} = 0$ болот.

в) $(-3)^{\frac{5}{4}}$ – туюнтмасы мааниге ээ болбойт. Анткени даражанын негизги –3<0. жана $\sqrt[4]{(-3)^5}$– анык тамыр жок.

г) $(-3)^0 = 1$ Ар кандай сандын нөлүнчү даражасы 1ге барабар.

д) $0^{-\frac{4}{5}}$ – туюнтмасы мааниге ээ болбойт. Анткени санды нөлгө бөлүгө болбойт.

е) $(-2)^5 = -32$. болот.

Бүтүн көрсөткүчтүү даражанын бардык касиеттери оң негиздүү каалагандай рационалдык даража үчүн да туура болот.

Рационалдык көрсөткүчтүү даража төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

Каалагандай a>0 жана рационалдык p жана q сандары үчүн:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \quad (1)$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}, \quad (2)$$

$$(a^p)^q = a^{pq}, \quad (3)$$

$a > 0, \quad b > 0$ жана рационалдык p саны үчүн

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p, \quad (4)$$

$$(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}. \quad (5)$$

Эгерде бөлчөк көрсөткүчтүн алымын жана бөлүмүн нөлдөн айырмалуу бир эле санга көбөйтсөк анда даража көрсөткүчтүн чоңдугу өзгөрбөйт.

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}.$$

Бул барабардык бөлчөк көрсөткүчтүү даражанын негизги касиети деп аталат.

5-мисал. Эсептегиле.

а) $7^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{9}{4}}$; г) $8^{\frac{5}{6}} : 2^{\frac{1}{2}}$;

Бул мисалды (1), (2) жана (3) касиеттерди б) $3^{-\frac{7}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{5}}$; д) $16^{\frac{11}{12}} : 16^{\frac{2}{3}}$; колдонуп чыгарабыз

в) $2^{\frac{2}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{7}}$; е) $(27^{\frac{1}{9}})^{-3}$

Чыгаруу: а) $7^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{9}{4}} = 7^{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}} = 7^{\frac{12}{4}} = 7^3 = 343$;

б) $3^{-\frac{7}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{-\frac{7}{5}+\frac{2}{5}} = 3^{-\frac{5}{5}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$;

в) $2^{\frac{2}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{7}} = 2^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}} = 2^{\frac{7}{7}} = 2^1 = 2$;

г) $8^{\frac{5}{6}} : 2^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{5}{6}} : 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3 \cdot \frac{5}{6}} : 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} : 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 2^2 = 4$;

д) $16^{\frac{11}{12}} : 16^{\frac{2}{3}} = 16^{\frac{11}{12}-\frac{2}{3}} = 16^{\frac{3}{12}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$;

е) $(27^{\frac{1}{9}})^{-3} = 27^{\frac{1}{9} \cdot (-3)} = 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$;

6-мисал. Эсептегиле.

а) $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}} : (\frac{8}{125})^{\frac{1}{3}}$; в) $480^{\frac{3}{5}} : 15^{\frac{3}{5}}$;

б) $(\frac{243}{32})^{\frac{2}{5}} \cdot (\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}}$; г) $7^{\frac{9}{5}} : 7^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}$;

д) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-0,35} \cdot 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{-0,65}$; е) $(10^4)^{0,5} \cdot (0,0001)^{\frac{1}{4}}$;

Чыгаруу: Бул мисалдарды чыгарууда рационал көрсөткүчтүү даражанын бардык касиеттерин пайдаланабыз.

а) $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}} : (\frac{8}{125})^{\frac{1}{3}} = (27^{\frac{1}{3}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} : \frac{8^{\frac{1}{3}}}{125^{\frac{1}{3}}} = (\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64}) : \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} =$

$= (3 \cdot 4) : \frac{2}{5} = 12 \cdot \frac{5}{2} = 6 \cdot 5 = 30$;

б) $(\frac{243}{32})^{\frac{2}{5}} \cdot (\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}} = (\frac{3^5}{2^5})^{\frac{2}{5}} \cdot (\frac{2^3}{3^3})^{\frac{1}{3}} = \frac{3^{5 \cdot \frac{2}{5}}}{2^{5 \cdot \frac{2}{5}}} \cdot \frac{2^{3 \cdot \frac{1}{3}}}{3^{3 \cdot \frac{1}{3}}} = \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$;

в) $480^{\frac{3}{5}} : 15^{\frac{3}{5}} = (480 : 15)^{\frac{3}{5}} = 32^{\frac{3}{5}} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$;

г) $7^{\frac{9}{5}} : 7^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{7}{6}} = 7^{\frac{9}{5}-\frac{4}{5}} - 2^{\frac{5}{6}+\frac{7}{6}} = 7^1 - 2^2 = 7 - 4 = 3$;

д) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-0,35} \cdot 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{-0,65} = 7^{\frac{1}{3}+(-0,35)+\frac{2}{3}+(-0,65)} = 7^0 = 1$;

е) $(10^4)^{0,5} \cdot (0,0001)^{\frac{1}{4}} = 10^2 \cdot \sqrt[4]{0,0001} = 100 \cdot 0,1 = 10$.

7-мисал. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө.

а) $\left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}\right)^{1\frac{1}{2}} \cdot a^{0,5} \cdot b^{1,2}$; б) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-5}}\right)^3\right)^{\frac{1}{15}}$;

в) $\left(\sqrt{x^{0,5}\cdot y^{1,5}}\right)^{12}$;г)$a^{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[4]{a\sqrt{a}}$;

д) $\frac{x^{\frac{3}{5}}\cdot y^{-1}-xy^{-\frac{3}{5}}}{\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{y^2}}$;е)$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[9]{y^{17}}}\cdot\left(\frac{x^{-\frac{1}{6}}\cdot\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{xy^{-2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x^{-\frac{5}{6}}}{y^{-\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{3}{5}}$.

Чыгаруу:

а) $\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{2}{3}}\right)^{1\frac{1}{2}}\cdot a^{0,5}\cdot b^{1,2}=a^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}\cdot a^{0,5}\cdot b^{1,2}=$

$$=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{-1}\cdot a^{0,5}\cdot b^{1,2}=a^{\frac{1}{2}+0,5}\cdot b^{-1+1,2}=a\cdot b^{0,2};$$

б)$\left(\left(\frac{a^6}{b^{-5}}\right)^3\right)^{\frac{1}{15}}=\left(\frac{a^{18}}{b^{-15}}\right)^{\frac{1}{15}}=\frac{a^{18\cdot\frac{1}{15}}}{b^{-15\cdot\frac{1}{15}}}=\frac{a^{\frac{6}{5}}}{b^{-1}}=\sqrt[5]{a^6}\cdot b;$

в) $\left(\sqrt{x^{0,5}\cdot y^{1,5}}\right)^{12}=\left(x^{\frac{0,5}{2}}\cdot y^{\frac{1,5}{2}}\right)^{12}=x^{\frac{0,5}{2}\cdot 12}\cdot y^{\frac{1,5}{2}\cdot 12}=x^3\cdot y^9;$

г)$a^{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[4]{a\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{a^3}}=a^{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[8]{a^3}=a^{\frac{1}{8}}\cdot a^{\frac{3}{8}}=a^{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a};$

д) $\frac{x^{\frac{3}{5}}\cdot y^{-1}-xy^{-\frac{3}{5}}}{\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{y^2}}=\frac{x^{-1}y^{-1}\left(x^{\frac{2}{5}}-y^{\frac{2}{5}}\right)}{x^{\frac{2}{5}}-y^{\frac{2}{5}}}=x^{-1}y^{-1}=\frac{1}{xy};$

е)$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[9]{y^{17}}}\cdot\left(\frac{x^{-\frac{1}{6}}\cdot\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{xy^{-2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x^{-\frac{5}{6}}}{y^{-\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{3}{5}}=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{17}{9}}}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{12}}\cdot y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{2}{3}}}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{3}{2}}}=$

$$=\frac{x^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{12}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{17}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)}}=\frac{x^{-\frac{1}{4}}\cdot y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{5}{18}}}=x^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{6}+\frac{5}{18}}=x^{-\frac{7}{12}}\cdot y^{\frac{11}{18}}.$$

Рационалдык көрсөткүчтүү даражаларды камтыган туюнтмаларды өзгөртүп түзүүдө, бөлчөктүн бөлүмүн радикалды кармабай турган түргө келтирүүгө туура келет. Бул бөлчөктүн бөлүмүн радикалдан бошотуу деп аталат.

Радикалды камтыган көп мүчөнү көбөйткөндө радикалдан бошото турган туюнтманы анын түйүндөшү деп атайбыз.

Мисалы: $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ туюнтмасынын бөлүмүн иррационалдуулуктан бошоткула.

Чыгаруу: Бул бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $\sqrt{5}-\sqrt{3}$кө түйүндөш болгон $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ туюнтмасына көбөйтөбүз.

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=$$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2};$$

Бөлчөктүн бөлүмүн радикалдан бошотуу үчүн анын бөлүмүнүн түйүндөшүн табууда кыскача көбөйтүүнүн формулаларын пайдаланабыз.

Жогорку мисалда $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$формуласын эске алып, $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5-3$ боло тургандыгын таптык.

Бөлчөктүн бөлүмүндөгү радикалды жоюуда төмөндөгү түйүндөш туюнтмаларды пайдаланабыз.

$a > 0$жана $b > 0$ болсо, анда:

1. $\sqrt{a}$нын түйүндөшү $\sqrt{a}$;
2. $\sqrt[n]{a}$нын түйүндөшү$\sqrt[n]{a^{n-1}}$;
3. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$нын түйүндөшү$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$;
4. $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$нын түйүндөшү$\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$;
5. $\sqrt{a+\sqrt{b}}$нын түйүндөшү $\sqrt{(a^2-b)(a-\sqrt{b})}$;

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right) \cdot \sqrt{(a^2-b)(a-\sqrt{b})} = a^2 - b.$$

8-мисал. Бөлчөктөрдү радикалдардан бошоткула.

а) $\frac{3}{\sqrt{7}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{2a+1}}$; в)$\frac{x}{\sqrt{3x-5}}$;

г)$\frac{2}{\sqrt[3]{a}}$; д)$\frac{5}{\sqrt[5]{b}}$; е)$\frac{9}{\sqrt[8]{c^3}}$;

ж) $\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; з)$\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$; и)$\frac{4}{\sqrt{(x+\sqrt{y}}}$.

Чыгаруу: Бөлчөктөрдү радикалдардан бошотуу үчүн, алардын бөлүмдөрүнө түйүндөш туюнтмаларга бөлчөктүн алымын да бөлүмүн да көбөйтөбүз.

а) $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$;

б) $\frac{5}{\sqrt{2a+1}} = \frac{5\cdot\sqrt{2a+1}}{\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{2a+1}} = \frac{5\sqrt{2a+1}}{2a+1}$;

в)$\frac{x}{\sqrt{3x-5}} = \frac{x\cdot\sqrt{3x-5}}{\sqrt{3x-5}\cdot\sqrt{3x-5}} = \frac{x\sqrt{3x-5}}{3x-5}$;

г)$\frac{2}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$;

д) $\frac{5}{\sqrt[5]{b}} = \frac{5\cdot\sqrt[5]{b^4}}{\sqrt[5]{b}\cdot\sqrt[5]{b^4}} = \frac{5\sqrt[5]{b^4}}{b}$;

е) $\frac{9}{\sqrt[8]{c^3}} = \frac{9\cdot\sqrt[8]{c^5}}{\sqrt[8]{c^3}\cdot\sqrt[8]{c^5}} = \frac{9\sqrt[8]{c^5}}{c}$;

ж) $\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = \frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1} =$
$7(\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

з) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} = \frac{2(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})} = \frac{2(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{x+y}$;

и) $\frac{4}{\sqrt{(x+\sqrt{y}}} = \frac{4\cdot\sqrt{(x^2-y)(x-\sqrt{y})}}{\sqrt{(x+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{(x^2-y)(x-\sqrt{y})}} = \frac{4\cdot\sqrt{(x^2-y)(x-\sqrt{y})}}{x^2-y}$.

4.4. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

86. Бөлчөк көрсөткүчтүү даражаны тамыр менен алмаштыргыла.

а) $5^{\frac{2}{3}}$; б) $7^{-\frac{4}{9}}$; в) $0{,}7^{0{,}3}$;

г) $x^{1{,}8}$; д) $(a-b)^{\frac{2}{5}}$; е) $x(x+y)^{-\frac{2}{3}}$.

Чыгаруу: а) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$; б) $7^{-\frac{4}{9}} = \frac{1}{7^{\frac{4}{9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{7^4}}$;

в) $0{,}7^{0{,}3} = 0{,}7^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}7^3}$; г) $x^{1{,}8} = x^{1\frac{8}{10}} = x^{\frac{9}{5}} = \sqrt[5]{x^9}$;

д) $(a-b)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(a-b)^2}$; е) $x(x+y)^{-\frac{2}{3}} = \frac{x}{(x+y)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x}{\sqrt[3]{(x+y)^2}}$.

87. Арифметикалык тамырды бөлчөк көрөсткүчтүү даража түрүндө жазгыла.

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{2^{-1}}$; в) $\sqrt[5]{\left(\frac{4}{7}\right)^3}$;

г) $\sqrt[8]{0{,}3}$; д) $\sqrt[9]{7(x^2-y^2)^2}$; е) $\sqrt[7]{\frac{a+b}{2}}$.

Чыгаруу: а) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt[3]{2^{-1}} = 2^{-\frac{1}{3}}$;

в) $\sqrt[5]{\left(\frac{4}{7}\right)^3} = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{3}{5}}$; г) $\sqrt[8]{0{,}3} = 0{,}3^{\frac{1}{8}}$;

д) $\sqrt[9]{7(x^2-y^2)^2} = 7^{\frac{1}{9}}(x^2-y^2)^{\frac{2}{9}}$; е) $\sqrt[7]{\frac{a+b}{2}} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{1}{7}}$.

88. Эсептегиле.

а) $125^{\frac{1}{3}}$; б) $10000^{-\frac{1}{4}}$; в)$(5^{-7})^{-\frac{2}{7}}$;

г)$\left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(2\frac{10}{27}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{128}\right)^{\frac{1}{7}}$; д) $32^{\frac{2}{5}} \cdot (0{,}16)^{\frac{3}{2}}$; е) $49^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}}$;

ж) $289^{\frac{2}{3}} : 17^{\frac{1}{3}}$; з)$9^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^2$; и)$1000^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$;

к) $11^{\frac{11}{9}} : 11^{\frac{2}{9}} - 5^{\frac{9}{7}} : 5^{\frac{2}{7}}$; л) $\left(3^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{36}$.

Чыгаруу: а) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$;

б) $10000^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{10000^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$;

в)$(5^{-7})^{-\frac{2}{7}} = 5^{-7\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)} = 5^2 = 25$;

г) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(2\frac{10}{27}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{128}\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \cdot \sqrt[3]{\frac{64}{27}} - \sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{2} =$

$= 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$;

д)$32^{\frac{2}{5}} \cdot (0{,}16)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{0{,}16}\right)^3 = 2^2 \cdot 0{,}4^3 = 4 \cdot 0{,}064 = 0{,}256$;

е) $49^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = (49 \cdot 7)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{343} = 7$;

ж) $289^{\frac{2}{3}} : 17^{\frac{1}{3}} = (17^2)^{\frac{2}{3}} : 17^{\frac{1}{3}} = 17^{\frac{4}{3}} : 17^{\frac{1}{3}} = 17^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 17^{\frac{3}{3}} = 17$;

з) $9^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^2 = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^2 = 3^{\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)+2} = 3^2 = 9$;

и)$1000^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = (1000 : 8)^{\frac{2}{3}} = 125^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$;

к) $11^{\frac{11}{9}} : 11^{\frac{2}{9}} - 5^{\frac{9}{7}} : 5^{\frac{2}{7}} = 11^{\frac{11}{9}-\frac{2}{9}} - 5^{\frac{9}{7}-\frac{2}{7}} = 11^{\frac{9}{9}} - 5^{\frac{7}{7}} = 11 - 5 = 6$;

л) $\left(3^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{36} = \left(\frac{3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} - \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}}\right) \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} =$

$= \frac{3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} - \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3 - 2 = 1.$

89. Амалдарлы аткаргыла.

а) $a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right)$; б)$\left(x^{-\frac{1}{3}} - 4\right)\left(x^{-\frac{2}{3}} + 3\right)$;

в) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2$; г) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$;

д) $(3 - x^{0.5})(3 + x^{0.5})$; е)$\left(\sqrt[3]{xy^{-4}} + (xy)^{-\frac{2}{3}}\right)\sqrt[6]{x^2y^4}$;

ж)$\left(a^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+1\right)$з)$\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{3}$.

Чыгаруу:

а) $a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\right)=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}=ax^{\frac{2}{3}}+xa^{\frac{1}{3}};$

б)$\left(x^{-\frac{1}{3}}-4\right)\left(x^{-\frac{2}{3}}+3\right)=x^{-\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}}-4x^{-\frac{2}{3}}-12=$
$=x^{-1}+\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}-12=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}-12;$

в) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2}-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}=x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y;$

г) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a+b;$

д) $(3-x^{0.5})\,(3+x^{0.5})=(3)^2-(x^{0.5})^2=9-x;$

е)$\left(\sqrt[3]{xy^{-4}}+(xy)^{-\frac{2}{3}}\right)\sqrt[6]{x^2y^4}=\left(x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}\right)x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}=$
$=x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}y^{0};$

ж)$\left(a^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+1\right)=\left(a^{\frac{2}{3}}-1\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+1\right)=a^{\frac{4}{3}}+1;$

з)$\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{3}=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{3}-3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{2}\cdot 1+3x^{\frac{1}{3}}\cdot 1^2-1^3=$
$=x-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+1.$

90. Жалпы көбөйтүүчүнү кашаанын сыртына чыгаргыла.

а) $3a^{\frac{1}{2}}-a;$ б) $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}};$ в) $(xy)^{\frac{2}{5}}-\left(xz\right)^{\frac{2}{5}};$ г$\Big)$ $a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}$.

Чыгаруу:

а) $3a^{\frac{1}{2}}-a=a^{\frac{1}{2}}\left(3-a^{\frac{1}{2}}\right);$ б) $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right);$

в)$(xy)^{\frac{2}{5}}-(xz)^{\frac{2}{5}}=x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{5}}-x^{\frac{2}{5}}z^{\frac{2}{5}}=x^{\frac{2}{5}}\left(y^{\frac{2}{5}}-z^{\frac{2}{5}}\right);$

г) $a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{8}}\left(a^{\frac{1}{8}}-1\right).$

91. Көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

а) $a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}};$ г) $27-x;$ ж) $8a-125;$

б) $5+\sqrt{5};$ д) $a^{\frac{3}{5}}+1;$ з) $x^{\frac{1}{8}}-81y^{\frac{1}{101}};$

в) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[9]{4};$ е) $x+y;$ и) $a^{-2}+b^{-2};$

Чыгаруу:

а) $a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}} = (a^{\frac{1}{12}})^2 - (b^{\frac{1}{12}})^2 = \left(a^{\frac{1}{12}} - b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{12}} + b^{\frac{1}{12}}\right);$

б) $5 + \sqrt{5} = (5^{\frac{1}{3}})^3 + (5^{\frac{1}{6}})^3 =$

$= (5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{1}{6}})((5^{\frac{1}{3}})^2 - 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} + \left(5^{\frac{1}{6}})^2\right) = \left(5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{1}{6}}\right)\left(5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{3}}\right);$

в) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[9]{4} = 2^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{2}{9}} = \left(2^{\frac{1}{6}}\right)^2 - \left(2^{\frac{1}{9}}\right)^2 =$

$= \left(2^{\frac{1}{6}} - 2^{\frac{1}{9}}\right)\left(2^{\frac{1}{6}} + 2^{\frac{1}{9}}\right);$

г) $27 - x = 3^3 - (x^{\frac{1}{3}})^3 = (3 - x^{\frac{1}{3}})(3^2 + 3x^{\frac{1}{3}} + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 =$

$= \left(3 - x^{\frac{1}{3}}\right)\left(9 + 3x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right);$

д) $a^{\frac{3}{5}} + 1 = (a^{\frac{1}{5}})^3 + 1^3 = (a^{\frac{1}{5}} + 1)(\left(a^{\frac{1}{5}})^2 - a^{\frac{1}{5}} \cdot 1 + 1^2\right) =$

$= \left(a^{\frac{1}{5}} + 1\right)\left(a^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{5}} + 1\right);$

е) $x + y = (x^{\frac{1}{3}})^3 + (y^{\frac{1}{3}})^3 = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right);$

ж) $8a - 125 = \left(2a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 5^3 = \left(2a^{\frac{1}{3}} - 5\right)\left(\left(2a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 2a^{\frac{1}{3}} \cdot 5 +\right.$

$\left.+5^2\right) = \left(2a^{\frac{1}{3}} - 5\right)\left(4a^{\frac{2}{3}} + 10a^{\frac{1}{3}} + 25\right);$

з) $x^{\frac{1}{8}} - 81y^{\frac{1}{101}} = (x^{\frac{1}{16}})^2 - (9y^{\frac{1}{202}})^2 = \left(x^{\frac{1}{16}} - 9x^{\frac{1}{202}}\right)\left(x^{\frac{1}{16}} + 9y^{\frac{1}{202}}\right);$

и) $a^{-2} + b^{-2} = (a^{-\frac{2}{3}})^3 + (b^{-\frac{2}{3}})^3 = \left(a^{-\frac{2}{3}} + b^{-\frac{2}{3}}\right)\left(a^{-\frac{4}{3}} - a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{2}{3}} +\right.$

$\left.+b^{-\frac{4}{3}}\right).$

92. Бөлчөктөрдү кыскарткыла.

а) $\frac{7+7^{\frac{1}{3}}}{5\cdot 7^{\frac{1}{3}}}$; в) $\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$;

б) $\frac{a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}-1}$; г) $\frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$;

Чыгаруу: а) $\frac{7+7^{\frac{1}{3}}}{5\cdot 7^{\frac{1}{3}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{2}{3}}+1\right)}{5\cdot 7^{\frac{1}{3}}} = \frac{7^{\frac{2}{3}}+1}{5}$;

б) $\frac{a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}-1}=\frac{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{2}}-1)}{a^{\frac{1}{2}}-1}=a^{\frac{1}{4}};$

в) $\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}};$

г) $\frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}=x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}.$

93. Бөлчөктүн бөлүмүн радикалдан бошоткула.

а) $\frac{1}{3+\sqrt{11}+\sqrt{8}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$; д) $\frac{a}{\sqrt[6]{3}-\sqrt[6]{2}}$;

б) $\frac{9}{\sqrt{7+\sqrt{5}}}$; г) $\frac{\sqrt{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$.

Чыгаруу: а) Бул бөлчөктүн радикалдан бошотуу үчүн анын бөлүмүн жана алымын $3+\sqrt{11}-\sqrt{8}$ түйүндөшүнө көбөйтөбүз.

$$\frac{1}{3+\sqrt{11}+\sqrt{8}}=\frac{3+\sqrt{11}-\sqrt{8}}{(3+\sqrt{11}+\sqrt{8})(3+\sqrt{11}-\sqrt{8})}=\frac{3+\sqrt{11}-\sqrt{8}}{(3+\sqrt{11})^2-8}=\frac{3+\sqrt{11}-\sqrt{8}}{9+6\sqrt{11}+11-8}=$$

$$=\frac{3+\sqrt{11}-\sqrt{8}}{6\sqrt{11}+12}=\frac{(3+\sqrt{11}-\sqrt{8})(6\sqrt{11}-12)}{(6\sqrt{11}+12)(6\sqrt{11}-12)}=\frac{(3+\sqrt{11}-\sqrt{8})(6\sqrt{11}-12)}{36\cdot 11-144}=$$

$$=\frac{(3+\sqrt{11}-\sqrt{8})(6\sqrt{11}+12)}{252};$$

б) $$\frac{9}{\sqrt{7+\sqrt{5}}}=\frac{9\sqrt{(7^2-5)(7-\sqrt{5})}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{(7^2-5)(7-\sqrt{5})}}=\frac{9\sqrt{44(7-\sqrt{5})}}{\sqrt{(7^2-\sqrt{5})^2)(7^2-5)}}=$$

$$=\frac{9\sqrt{44(7-\sqrt{5})}}{7^2-5}==\frac{9\sqrt{44(7-\sqrt{5})}}{44};$$

в) $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}=\frac{(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5^2-\sqrt[3]{5\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}})}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{7};$$

г) $$\frac{\sqrt{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{9\cdot 5-3}}=\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{42}}=$$

$$=\frac{(3\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{42}}{42}.$$

д) $\frac{a}{\sqrt[6]{3}-\sqrt[6]{2}}=\frac{a}{\sqrt[3]{\sqrt{3}}-\sqrt[3]{\sqrt{2}}}=$ бул мисалды чыгарууда

$\frac{a}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}=\frac{a}{b-c}\cdot\left(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)b\neq c$ формуласын колдонобуз.

$$= \frac{a}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{(\sqrt{3})^2} + \sqrt[3]{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(\sqrt{2})^2} \right) =$$

$$= \frac{a\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{\sqrt{6}} + \sqrt[3]{2}\right)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = a\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{\sqrt{6}} + \sqrt[3]{2}\right)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}-\sqrt[3]{3}}$ =алдынкы мисалда пайдаланган формуланы колдонобуз.

$$= \frac{1}{\sqrt{2^3}-3} \cdot \left(\sqrt[3]{\left(\sqrt{2^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\sqrt{2^3}\cdot 3} + \sqrt[3]{3^2} \right) =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{3\sqrt{8}}+\sqrt[3]{9}\right)(\sqrt{8}+3)}{(\sqrt{8}-3)(\sqrt{8}+3)} = \frac{\left(\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{3\sqrt{8}}+\sqrt[3]{9}\right)(\sqrt{8}+3)}{-1}.$$

4.5. Иррационалдык көрсөткүчтүү даража

Аныктама.

Көрсөткүчү $\pi, \sqrt{5}$ жана $\sqrt{3}$ сыяктуу иррационалдык сандар болгон даража, иррационалдык көрсөткүчтүү даража деп аталат.

Мисалы: $3^{\sqrt{2}},\ 5^{\pi},\ 7^{-\sqrt{3+1}}$.

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 4) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$;

2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; 5) $(a^x)^y = a^{xy}$

3) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

Бул 1) – 5) барабардыктар иррационалдык көрсөткүчтүү даражалар үчүн да аткарылат.

1-мисал. Эсептегиле.

а) $3^{3-2\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{3}}$; г) $(5^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1} + (2^{\sqrt[4]{9}+1})^{\sqrt[4]{9}-1}$;

б) $5^{1+3\sqrt[3]{7}} : 125^{\sqrt[3]{7}}$; д) $6^{2+3\sqrt{5}} : \left(8^{\sqrt{5}} \cdot 27^{\sqrt{5}}\right)$;

в) $[(\frac{1}{2})^{\sqrt{3}}]^{\sqrt{27}}$; е) $4^{-\sqrt{2}} \cdot 2^{2(\sqrt{2}+1)}$;

Чыгаруу: 1) –5) барабардыктарды пайдаланабыз.

а) $3^{3-2\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{3}} = 3^{3-2\sqrt{3}} \cdot 3^{2\sqrt{3}} = 3^{3-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}} = 3^3 = 27$;

б) $5^{1+3\sqrt[3]{7}} : 125^{\sqrt[3]{7}} = 5^{1+3\sqrt[3]{7}} : 5^{3\sqrt[3]{7}} = 5^{1+3\sqrt[3]{7}-3\sqrt[3]{7}} = 5$;

в) $[(\frac{1}{2})^{\sqrt{3}}]^{\sqrt{27}} = [(\frac{1}{2})^{\sqrt{3}}]^{3\sqrt{3}} = (\frac{1}{2})^{\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}} = (\frac{1}{2})^9 = \frac{1}{512}$;

г) $(5^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1} + (2^{\sqrt[4]{9}+1})^{\sqrt[4]{9}-1} = 5^{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \cdot 2^{(\sqrt[4]{9}+1)(\sqrt[4]{9}-1)} =$

$= 5^1 \cdot 2^{\sqrt{9}-1} = 5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20;$

д) $6^{2+3\sqrt{5}} : \left(8^{\sqrt{5}} \cdot 27^{\sqrt{5}}\right) = 6^2 \cdot 6^{3\sqrt{5}} : \left(2^{3\sqrt{5}} \cdot 3^{3\sqrt{5}}\right) =$

$= 36 \cdot 6^{3\sqrt{5}} : 6^{3\sqrt{5}} = 36 \cdot 6^{3\sqrt{5}-3\sqrt{5}} = 36 \cdot 6^0 = 36;$

е) $4^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{2(\sqrt{2}+1)} = 2^{2(1-\sqrt{2})} \cdot 2^{2(\sqrt{2}+1)} = 2^{2-2\sqrt{2}} \cdot 2^{2\sqrt{2}+2} =$

$= 2^{2-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2} = 2^4 = 16.$

2-мисал. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө.

а) $3x^{-2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{x^{-\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}$; б) $[(\sqrt[5]{2})^{\sqrt{5}}]^{-3\sqrt{5}}$;

Чыгаруу: а) $3x^{-2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{x^{-\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1} = \frac{3}{x^{2\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{x^{-(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}} =$

$= \frac{3}{x^{2\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{x^{-(3+2\sqrt{5}+1)}} = \frac{3}{x^{2\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{x^{-4-2\sqrt{3}}} = \frac{3}{x^{2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}}} = \frac{3}{x^{-4}} = 3x^4;$

б) $[(\sqrt[5]{2})^{\sqrt{5}}]^{-3\sqrt{5}} = (\sqrt[5]{2})^{\sqrt{5}\cdot(-3\sqrt{5})} = (\sqrt[5]{2})^{-3\cdot 5} = (2^{\frac{1}{5}})^{-15} =$

$= 2^{\frac{1}{5}\cdot(-15)} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$

4.6. Сан барабарсыздыгын даражага көтөрүү

Каалагандай $p = \frac{m}{n}$рационалдык саны үчүн:

Эгерде $a > b > 0,\ p > 0$ болсо, анда $a^p < b^p$ болот.

Эгерде эки жагы тең терс эмес барабарсыздыкты оң даражага көтөрсөк, анда барабарсыздыктын белгиси сакталат, ал эми терс даражага көтөрсөк, анда барабарсыздык белгиси карама-каршыга өзгөрөт.

Барабарсыздыктын бул касиеттеринен сандарды салыштырууда колдонулуучу төмөндөгүдөй эрежелер келип чыгат:

1) Эгерде $a > 1$болсо, анда aсанынын каалагандай эки ар түрдүү оң даражаларынын кайсынысынын даражасы чоң болсо, ошонусу чоң болот;

2) Эгерде $0 < a < 1$ болсо, анда aсанынын каалагандай эки ар түрдүү оң даражасынын кайсынысынын даражасы чоң болсо, ошонусу кичине болот.

1-мисал. Сандарды салыштыргыла.

а) $4^{\frac{1}{5}}$ жана$5^{\frac{1}{5}}$; г) $\left(\frac{7}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$ жана $(0,43)^{\frac{1}{3}}$;

б) $7^{-\sqrt{3}}$ жана$9^{-\sqrt{3}}$; д) $\sqrt[3]{16}$ жана $\sqrt[6]{256}$;

в) $(0{,}7)^{\pi}$ жана$(0{,}7)^{3{,}4}$; е) $(\frac{14}{15})^{-\sqrt{5}}$жана $(\frac{15}{14})^{-\sqrt{5}}$.

Чыгаруу: а) $4^{\frac{1}{5}} < 5^{\frac{1}{5}}$, анткени $4 < 5$;

б) $7^{-\sqrt{3}} > 9^{-\sqrt{3}}$, анткени $7 < 9$;

в) $(0{,}7)^{\pi} > (0{,}7)^{3{,}4}$, анткени $\pi < 3{,}4$;

г) $(\frac{7}{16})^{\frac{1}{3}}$ жана$(0{,}43)^{\frac{1}{3}}$ мында $\frac{7}{16} = 0{,}4375$. $(0{,}4375)^{\frac{1}{3}} >$
$> (0{,}43)^{\frac{1}{3}}$ анткени $\frac{7}{16} > 0{,}43$;

д) $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{16^2} = \sqrt[3]{16}$ ошондуктан$\sqrt[3]{16} = \sqrt[6]{256}$;

е) $(\frac{14}{15})^{-\sqrt{5}}$жана $(\frac{15}{14})^{-\sqrt{5}}$ мында $\frac{14}{15} < 1$жана $\frac{15}{14} > 1$; б.а.
$\frac{14}{15} < \frac{15}{14}$болот, анда $(\frac{14}{15})^{-\sqrt{5}} > (\frac{15}{14})^{-\sqrt{5}}$.

Эгерде $a > 0$, $a \neq 1$ болсо, анда $a^x = a^y$ барабардыгы $x = y$ болгон учурда гана орун алат.

Бул барабардыкты көрсөткүчү белгисиз болгон даражаларды кармаган теңдемелерди чыгарууда колдонобуз.

2-мисал. Теңдемелерди чыгаргыла.

а) $2^x = 8$; в) $27^x \cdot 9^{x-3} = \frac{1}{9}$;

б) $3^{x-5} = 9$; г) $5^{3x-4} = (\frac{1}{5})^{x-6}$.

Чыгаруу: а) $2^x = 8$

$2^x = 2^3$,

$x = 3$.

б) $3^{x-5} = 9$,

$3^{x-5} = 3^2$,

$x - 5 = 2$,

$x = 2 + 5$,

$x = 7$.

г) $5^{3x-4} = (\frac{1}{5})^{x-6}$,

$5^{3x-4} = 5^{-(x-6)}$,

$3x - 4 = -x + 6$,

$3x + x = 6 + 4$,

$4x = 10$,

в) $27^x \cdot 9^{x-3} = \frac{1}{9}$,

$3^{3x} \cdot 3^{2(x-3)} = \frac{1}{3^2}$,

$3^{3x+2(x-3)} = 3^{-2}$,

$3x + 2x - 6 = -2$,

$5x = -2 + 6$,

$x = 4:5$

$x = 0{,}8$.

$$x = 10:4,$$
$$x = 2{,}5.$$

$a^x = b$теңдемеси берилсин.

мында $1 \neq a > 0$, $a \neq b$ жана $b > 0$.

Бул теңдеменин тамыры x_0ду b санынын a негизги боюнча логарифми деп айтабыз жана $log_a b = x$ деп белгилейбиз.

Мисалы, $log_3 9 = 2$ үч негизги боюнча 9 дун логарифми 2 ге барабар деп окулат.

$$3^2 = 9.$$

Аныктама.

b санынын aнегизи боюнча логарифми деп, даражасы bга барабар болгондой aсанынын даража көрсөткүчүн айтабыз.

б.а. $log_a b = c$болсо, $a^c = b$ болот.

Мисалы, $log_2 b = 4$, $2^4 = 16$.

3-мисал. Эсептегиле.

а) $log_5 25$; в) $log_2 \frac{1}{16}$; д) $log_6 36$;

б) $log_3 81$; г) $log_{\frac{1}{8}} 8$; е) $log_{0,5} 16$.

Чыгаруу:

а) $log_5 25 = log_5 5^2 = 2$; б) $log_3 81 = 4$;

в) $log_2 \frac{1}{16} = log_2 2^{-4} = -4$; г) $log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

д) $log_6 36 = 2$ е) $log_{0,5} 16 = -4$.

Аныктама.

Каалагандай оң сандын 10 негизи боюнча логарифми, ондук логарифмдеп аталат.

Ал lgb деп белгиленет.

lgb $- b$санынын ондук логарифми деп окулат.

Мисалы $lg100 = 2$, жүздүн ондук логарифм 2ге барабар.

4-мисал. Эсептегиле.

а) $lg10$; б) $lg0.1$; в) $lg1000$;

г) $lg0{,}001$; д) $lg10^8$; е) $lg10^{-6}$.

Чыгаруу:

а) $lg10 = 1$; б) $lg0.1 = -1$;

в) $lg1000 \ = 3;$ г) $lg0{,}001 \ = -3;$

д) $lg10^8 \ = 8;$ е) $lg10^{-6} = -6.$

5-мисал. Теңдемелерди чыгаргыла.

а) $lg^x = 3$ б) $lg(2x + 4) = 2$

в) $lg(x + 0{,}7) = -3$ г) $lg[(x - 3)(x + 5) - 1] = 0.$

Чыгаруу:

а) $lgx = 3,$
$$x = 10^3,$$
$$x = 1000;$$

в) $lg(x - 0{,}7) = -3,$
$$x - 0{,}7 = 10^{-3},$$
$$x = 0{,}001 + 0{,}7,$$
$$x = 0{,}7001;$$

б) $lg(2x + 4) = 2,$
$$2x + 4 = 10^2,$$
$$2x + 4 = 100,$$
$$2x = 100 - 4,$$
$$2x = 96,$$
$$x = 96:2,$$
$$x = 48;$$

г) $lg[(x - 3)(x + 5) + 1] = 0,$
$$(x - 3)(x + 5) + 1 = 10^0,$$
$$(x - 3)(x + 5) + 1 = 1,$$
$$(x - 3)(x + 5) = 1 - 1,$$
$$(x - 3)(x + 5) = 0$$
$$x - 3 = 0, \quad x + 5 = 0,$$
$$x_1 = 3; \quad x_2 = -5;$$

4.5.–4.6. Көнүгүүлөр үчүн тапшырма

94. Эсептегиле.

а) $2^{3-4\sqrt{2}} \cdot 16^{\sqrt{2}};$ в) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} - (3^{\sqrt{7}-2})^{\sqrt{7}+2};$

б) $(9^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2} + 71,$ г) $[(\sqrt[3]{5})^{\sqrt{3}}]^{2\sqrt{3}};$

Чыгаруу:

а) $2^{3-4\sqrt{2}} \cdot 16^{\sqrt{2}} = 2^{3-4\sqrt{2}} \cdot 2^{4\sqrt{2}} = 2^{3-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}} = 2^3 = 8;$

б) $(9^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2} + 71 = 9^{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} + 71 = 9 + 71 = 80;$

в) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} - (3^{\sqrt{7}-2})^{\sqrt{7}+2)} = 5^3 - 3^{7-4} = 5^3 - 3^3 =$
$= 125 - 27 = 98;$

г) $[(\sqrt[3]{5})^{\sqrt{3}}]^{2\sqrt{3}} = (\sqrt[3]{5^{\sqrt{3}}})^{2\sqrt{3}} = 5^{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{3}} = 5^2 = 25;$

95. Туюнтманы жөнкөйлөткүлө.

а) $\left(\frac{5}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2-x}\right) : \frac{5+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2+x}};$ б) $\left(\frac{\sqrt[6]{ab}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}}\right)^6;$

Чыгаруу:

а) $\left(\frac{5}{\sqrt{2+x}}+\sqrt{2-x}\right):\frac{5+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2+x}}=\frac{5+\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}}:\frac{5+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2+x}}=$

$=\frac{5+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2+x}}\cdot\frac{\sqrt{2+x}}{5+\sqrt{4-x^2}}=1;$

б) $\left(\frac{\sqrt[6]{ab}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}}\right)^6=\left(\frac{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[6]{b}-(\sqrt[6]{b})^2}{(\sqrt[6]{a})^2-\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[6]{b}}\right)^6=\left(\frac{\sqrt[6]{b}\cdot(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})}{\sqrt[6]{a}\cdot(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})}\right)^6=\left(\frac{\sqrt[6]{b}}{\sqrt[6]{a}}\right)^6=\frac{b}{a};$

96. Сандарды салыштыргыла.

а) $(0{,}75)^{\frac{1}{9}}$ жана $\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{9}}$; в) $(0{,}71)^{\frac{8}{7}}$ жана $(0{,}71)^{\frac{10}{7}}$;

б) $\left(\frac{15}{14}\right)^{-\frac{1}{3}}$ жана $(0{,}38)^{-\frac{1}{3}}$; г) $\left(\frac{15}{17}\right)^{-\sqrt{3}}$ жана $\left(\frac{6}{17}\right)^{-\sqrt{3}}$;

Чыгаруу:

а) $(0{,}75)^{\frac{1}{9}}<\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{9}}$, анткени $0{,}75<\frac{8}{9}\approx 0{,}88$;

б) $\left(\frac{15}{14}\right)^{-\frac{1}{3}}>(0{,}38)^{-\frac{1}{3}}$анткени $0{,}38>\frac{5}{14}\approx 0{,}36$;

в) $(0{,}71)^{\frac{8}{7}}>(0{,}71)^{\frac{10}{7}}$анткени$\frac{8}{7}<\frac{10}{7}$;

г) $\left(\frac{5}{17}\right)^{-\sqrt{3}}>\left(\frac{6}{17}\right)^{-\sqrt{3}}$; анткени $\frac{5}{17}<\frac{6}{17}$.

97. Теңдемени чыгаргыла.

а) $5^{x-4}=25^{x+3}$; в) $(\sqrt{27})^{3x+2}\cdot\sqrt{3}=\frac{9^{x+2}}{3\sqrt{3}}$;

б) $3^{4x-3}=\left(\frac{1}{27}\right)^{-x-3}$; г) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{4x-2}=(5\sqrt{5})^x$.

Чыгаруу:

а) $5^{7x-4}=25^{x+3}$,

$5^{7x-4}=5^{2(x+3)}$,

$7x-4=2x+6$,

$7x-2x=6+4$,

$5x=10$,

$x=10:5$,

в) $\left(\sqrt{27}\right)^{3x+2}\cdot\sqrt{3}=\frac{9^{x+2}}{3\sqrt{3}}$,

$(3^{\frac{3}{2}})^{3x+2}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot(3^2)^{x+2}$,

$3^{\frac{9}{2}x+3}=\frac{1}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\cdot 3^{2x+4}$.

$3^{\frac{9}{2}x+3}=3^{2x+2}$,

$\frac{9}{2}x+3=2x+2$

$\frac{9}{2}x-2x=2-3$

$x = 2,$

Жообу: $x = 2$

$\frac{5}{2}x = -1;$

$x = -1 : \frac{5}{2};$

$x = -\frac{2}{5}$

Жообу: $x = -\frac{2}{5}.$

б) $3^{4x-3} = (\frac{1}{27})^{-x-3}$

$3^{4x-3} = 3^{-3(-x-3)}$

$4x - 3 = 3x + 9$

$4x - 3x = 9 + 3$

$x = 12$

Жообу: $x = 12.$

г) $(\frac{1}{\sqrt{5}})^{4x-2} = (5\sqrt{5})^x,$

$(5^{-\frac{1}{2}})^{4x-2} = (5^{\frac{3}{2}})^x,$

$5^{-2x+1} = 5^{\frac{3}{2}x},$

$-2x + 1 = \frac{3}{2}x,$

$-2x - \frac{3}{2}x = -1,$

$-\frac{7}{2}x = -1,$

$x = -1 : (-\frac{7}{2}),$

$x = \frac{2}{7}.$

Жообу: $x = \frac{2}{7}$

98. Эсептегиле.

а) $lg10000$; б) $lg0{,}01$; в) $lg10^{-7}$; г) $lg10^{\frac{1}{2}}.$

Чыгаруу:

а) $lg10000 = 4;$

б) $lg0{,}01 = -2;$

в) $lg10^{-7} = -7;$

г) $lg10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$

99. Теңдемени чыгаргыла.

а) $lg_x = -1;$

б) $lg(3x - 2) = 2;$

в) $lg[(2x - 7)(x + 1) + 1] = 0;$

г) $lg[(5 - 3x)(2x + 3) + 100] = 2.$

Чыгаруу:

а) $lg_x = -1$

$x = 10^{-1}$

б) $lg(3x - 2) = 2$

$3x - 2 = 10^2$

$$x = \frac{1}{10}$$

Жообу: $x = \frac{1}{10}$;

$$3x - 2 = 100$$
$$3x = 100 + 2$$
$$3x = 102$$
$$x = 102:3$$
$$x = 34$$

Жообу: $x = 34$

в) $lg[(2x - 7)(x + 1) + 1] = 0$

$$(2x - 7)(x + 1) + 1 = 10^0$$
$$(2x - 7)(x + 1) = 1 - 1$$
$$(2x - 7)(x + 1) = 0$$
$$2x - 7 = 0; \quad x + 1 = 0$$
$$2x = 7; \quad x = -1$$
$$x = \frac{7}{2}$$

Жообу: $x_1 = \frac{7}{2}$; $x_2 = -1$;

г) $lg[(5 - 3x)(2x + 3) + 100] = 2$

$$(5 - 3x)(2x + 3) + 100 = 10^2$$
$$(5 - 3x)(2x + 3) + 100 = 100$$
$$(5 - 3x)(2x + 3) = 100 - 100$$
$$(5 - 3x)(2x + 3) = 0$$
$$5 - 3x = 0; \quad 2x + 3 = 0$$
$$3x = 5; \quad 2x = -3$$
$$x = \frac{5}{3}; \quad x = -\frac{3}{2}$$

Жообу: $x_1 = \frac{5}{3}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$.

V глава. Тригонометриянын элементтери
5.1 Бурч жана анын радиандык чени

Геометрияда бурчка төмөнкүдөй аныктама берилет.

Аныктама.

Бир чекиттен чыгуучу эки шоола менен чектелген тегиздиктин бөлүгү бурч деп аталат.

Бул аныктамадан тышкары тегиздикте берилген башталыш чекитке карата шооланын каалагандай бурулушунан пайда болгон фигура да бурч деп аныкталат.

Силерге белгилүү бурчтун чоңдугу градустук чен менен өлчөлөт.

Тик бурчтун $\frac{1}{90}$ бөлүгү 1 градус деп аталат. Аны 1^0деп белгилөө кабыл алынган.

Демек тик бурч 90^0, жайылган бурч 180^0 болот.

Шооланын баштапкы жана акыркы абалына буруу бурчу, бир эле маани менен эмес андан 360^0 ка эселүү санга айырмаланган бир катар маанилер менен да аныкталат.

Мисалы, 74^0, $74^0 + 360^0 = 434^0$, $74^0 + 2 \cdot 360^0 = 794^0$.

Сааттын жебесине каршы багытталган буруулар оң, сааттын жебесинин багыты боюнча аткарылган буруулар терс деп кабыл алынат.

Ошого жараша буруудан пайда болгон бурчтар да тиешелүү түрдө оң жана терс деп аталат.

Бурчту өлчөөнүн градустук ченинен башка, математикада бурчту өлчөөнүн радиандык чени да колдонулат.

Аныктама.

Жаасынын узундугу радиуска барабар болгон борбордук бурчтун чоңдугу 1 радиан бурч деп аталат.

Ал кыскача 1 рад деп белгиленет.

Айрым учурда радиан сөзү жазылбай эле, бурчту мүнөздөөчү сан жазылат.

Аныктама боюнча радиандык чен $\frac{L}{R} = \alpha$деп жазылат.

Мында, L – борбордук бурч таянган жаа,

R – айлананын радиусу,

α – радиандык чен.

Айлананын узундугуна туура келген толук бурч $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$радиан болот.

Демек жайылган бурч π радиан болот. Тик бурч $\frac{\pi}{2}$ радиан болот.

π радиан$=180^0$

1 радиан$=\frac{180^0}{\pi} = 57^0 17^1 45^{11}$болот.

1^0тук бурчтун радиандык чени, $1^0 = \frac{\pi}{180^0}$ рад $\approx 0{,}017$рад болот.

Ыңгайлуулук үчүн мындан ары рад сөзүн жазбайбыз.

20^0тук бурчтун радиандык чени төмөндөгүдөй табылат.

$20^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 20 = \frac{\pi}{9}$;

$\frac{\pi}{2}$ радианга барабар болгон бурчтун градустук чени төмөнкүдөй табылат.

$\frac{\pi}{2}$рад $= \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 90^0$.

1-мисал. Градустук чендеги бурчтарды радиан аркылуу туюнткула.

а) 45^0; в) 240^0;
б) 150^0; г) 360^0.

Чыгаруу:

а) $45^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$; в) $240^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 240 = \frac{4\pi}{3}$;
б) $150^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 150 = \frac{5\pi}{6}$; г) $360^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 360 = 2\pi$.

2-мисал. Радиандык чендеги бурчтарды градустук чен аркылуу туюнткула.

а) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{3\pi}{2}$; д) $\frac{4\pi}{15}$;
б) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{7\pi}{12}$; е) $\frac{11\pi}{6}$.

Чыгаруу:

а) $\frac{\pi}{3} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = 60^0$ г) $\frac{7\pi}{12} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{7\pi}{12} = 210^0$
б) $\frac{2\pi}{3} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^0$ д) $\frac{4\pi}{15} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{4\pi}{15} = 48^0$
в) $\frac{3\pi}{2} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{2} = 270^0$ е) $\frac{11\pi}{6} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{11\pi}{6} = 330^0$.

3-мисал. Үч бурчтуктун эки бурчу $\frac{7\pi}{18}$ жана $\frac{5\pi}{18}$ ге барабар. Анын үчүнчү бурчунун градустун ченин тапкыла.

Чыгаруу: Үч бурчтуктун белгисиз бурчу x рад болсун. Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $180^0 = \pi$ ге барабар.

Демек, төмөндөгүдөй теңдеме түзүгө болот.

$$\frac{7\pi}{18}+\frac{5\pi}{18}+x=\pi, \qquad x=\pi-\frac{7\pi}{18}-\frac{5\pi}{18},$$

$$x=\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}=\frac{180^0}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}=60^0$$

Жообу: 60^0.

4-мисал. Жаасы $\frac{\pi}{6}$ радианды камтыган радиусу 60см болгон айлананын жаасынын узундугун тапкыла.

Чыгаруу: Айлананын жаасынын узундугу $l = \propto \cdot r$ формуласы аркылуу табылат.

Берилген мисалда $\propto = \frac{\pi}{6}$ рад;

$r = 60$ см.

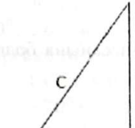
Демек, жаанынузундугу

$$l=\frac{\pi}{6}\cdot 60=\pi\cdot 10=3{,}14\cdot 10=31{,}4\text{см}.$$

Жообу: $l = 31{,}4см$.

5.2. Каалаган бурчтун синусу, косинусу, тангенси жана котагенси

$\propto$ тар бурчунун синусун, касинусун, тангенсин жана котангенсин геометрия курсунда төмөндөгүдөй аныктаганбыз.



Аныктама. Тик бурчтуу үч бурчтуктун $\propto$ тар бурчунун каршысында жаткан катеттин гиотенузага болгон катышы, ал бурчтун синусу деп аталат.

Ал $sin\,\alpha = \frac{a}{c}$ деп жазылат.

Ошондой эле αтар бурчуна жанаша жайгашкан катеттин гипотинузага болгон катышы, α бурчунун косинусу деп аталат.

$$cos\,\alpha = \frac{b}{c};$$

αтар бурчунун каршысындагы катеттин, ага жанаша жаткан катетке болгон катышы, α бурчунун тангенси деп аталат.

$$tg\alpha = \frac{a}{b};$$

αтар бурчуна жанаша жаткан катеттин анын кашысындагы катетке болгон катышы, α бурчунун котангенси деп аталат.

$$ctg\alpha = \frac{b}{a}.$$

Буларды биз тар бурчтун тригонометриялык функциялары деп атаганбыз. Эми биз каалагандай чоңдуктагы бурчтун тригонометриялык функцияларын аныктайбыз.

Тик бурчтуу координаталар системасынын оң бөлүгүнөн Aчекитин белгилеп алабыз. Борбору координаталар башталышы болгон жана Aчекити аркылуу өтүүчү айлана чиебиз.

OA радиусунун баштапкы радиус, OB радиусун кыймылдагы радиус деп атайбыз. OA баштапкы радиусу менен OB кыймылдагы радиусу α бурчун түзсүн дейли. Бул каалагандай чоңдуктагы α бурчунун тригонометриялык функцияларына төмөндөгүдөй аныктамалар берилет.

B чекитинин ординатасынын радиуска болгон катышы α бурчунун синусу деп аталат.

$$Sin\alpha = \frac{y}{R};$$

B чекитинин абсциссасынын радиуска болгон катышы $\propto$ бурчунун косинусу деп аталат.

$$cos \propto = \frac{x}{r};$$

B чекитинин ординатасынын анын абсциссанына болгон катышы $\propto$ бурчунун тангенси деп аталат.

$$tg \propto = \frac{y}{x};$$

B чекитинин абсциссасынын анын ординатасына болгон катышы $\propto$ бурчунун котангенси деп аталат.

$$ctg \propto = \frac{x}{y};$$

Эми бул тригонометриялык функциялардын аныкталуу областын жана маанилеринин областын аныктайлы.

Жогоруда берилген аныктамалар боюнча $sin \propto$ жана $cos \propto$ функциялары $\propto$ санынын (аргументин) каалагандай маанисинде мааниге ээ болушат.

Демек, sin$\propto$ жана $cos \propto$ функцияларынын аныкталуу областы $-(-\infty; +\infty)$ аралыгы болот.

$sin \propto$ жана $cos \propto$ функцияларынын маанилери $[-1; 1]$ аралыгында жатышат.

$tg \propto$ жана $ctg \propto B$ чекитинин координаталарынын катышы аркылуу туюнтулгандыктан, $\circ B$ чекитинин абсциссасы 0гө барабар болгондо $tg \propto$ мааниге ээ болбой калат.

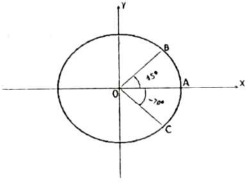
Ошондуктан $tg \propto$ нын аныкталуу областына $\propto$ нын $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ден башка бардык маанилери кирет.

Ошондой эле $ctg \propto$ нын аныкталуу областына $\propto$ нын $k\pi$ ден башка бардык маанилери кирет.

1-мисал. Төмөнкү бурчтардын кайсы чекиттерде жата тургандыгын аныктагыла.

$45^0, 80^0, 135^0, -70^0, -120^0$ жана -300^0.

Чыгаруу: Борбору координаталар башталышында жаткан айлана төрт чейрекке бөлүнөт.



I чейректе $0 <\propto< 90^0$бурчтар,
II чейректе $90^0 <\propto< 180^0$бурчтар,
III чейректе $180^0 <\propto< 270^0$бурчтар,
IV чейректе $270^0 <\propto< 360^0$бурчтар жатат.

90^0ка эселүү бурчтар б.а. 180^0, 270^0, 360^0жана башка бурчтар эч кандай чейрекке тиешелүү болбойт. Демек, $45^0, 80^0$тук бурчтар I чейрекке,

135^0тук бурч II чейрекке,
-70^0тук бурч IV чейрекке,
-120^0тук бурч III чейрекке,
-300^0тук бурч I чейрекке тиешелүү болот.

2-мисал. а) $sin\, \alpha + 5$; в) $sin\, \alpha - 2$;
б) $cos\, \alpha - 3$; г) $cos\, \alpha + 3$. туюнтмаларынын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

Чыгаруу: $sin\,\alpha$ жана$cos\,\alpha$нын эң чоң мааниси $[-1;1]$ аралыгында жаткандыктан, $sin\,\alpha$ менен $cos\,\alpha$нын эң чоң мааниси 1 болот, эң кичине мааниси –1 болот. Демек,

а) $sin\,\alpha + 5$ тин эң чоң мааниси 6 болот, эң кичине мааниси 4 болот;

б) $cos\,\alpha - 3$түн эң чоң мааниси -2 болот, эң кичине мааниси –4 болот.

в) $sin\,\alpha - 2$нин эң чоң мааниси -1 болот, эң кичине мааниси –3 болот.

г) $cos\,\alpha + 3$түн эң чоң мааниси 4 болот эң кичине мааниси 2 болот.

3-мисал. а) $cos\,\alpha = -0{,}7$; в) $sin\,\alpha = -5$;

б) $tg\alpha = 12$; $ctg\alpha = 1$ болушу мүнкүнбү.

Чыгаруу: а) $cos\,\alpha = -0{,}7$ болушу мүнкүн, анткени $cos\,\alpha$нын маанилери $[-1;1]$ аралыгында жатат.

б) $tg\alpha = 12$ болушу мүнкүн, анткени $\frac{y}{x}$ катышы 12ге барабар болушу мүнкүн.

в) $sin\alpha = -5$ болушу мүнкүн эмес, анткени –5, $[-1;1]$ аралыгына таандык болбойт.

г) $ctg\alpha = 1$ болот, анткени $\frac{x}{y} = 1$ аткарылат.

5.3. Тригонометриялык функциялардын касиеттери.

Тригонометриялыкфункциялардын чейректердеги белгилери төмөнкү таблицада көрсөтүлгөн.

чейректер / функциялар	I $0 <\alpha< \frac{\pi}{2}$	II $\frac{\pi}{2} <\alpha< \pi$	III $\pi < 0 < \frac{3\pi}{2}$	IV $\frac{3\pi}{2} <\alpha< 2\pi$
$sin\alpha$	+	+	-	-
$cos\,\alpha$	+	-	-	+
$tg\alpha$	+	-	+	-
$ctg\alpha$	+	-	+	-

Тригонометриялык функцияладын аргументине толук айланууну (2πни) бүтүн сан жолу кошсок, анда алардын маанилери өзгөрбөйт. Айлананын OA радиусун $\propto$ бурчуна буруудa деле,

$\propto +360^0$ка, $\propto +2 \cdot 360^0$ка ж.у.с. бурчтарга бурууда деле OB радиусу алынат, б.а. $\propto, \propto +360^0$, $\propto +2 \cdot 360^0$бурчтар үчүн тригонометриялык функциялар бир эле мааниге ээ болушат. Мындай касиеттерге ээ болгон функциялар мезгилдүү функциялар деп аталышат.

Терс аргументтүү тригонометриялык функцияларды оң аргументтүү тригонометриялык функциялардын маанилери менен туюнтуучу формулалар.

$$Sin(-\propto) = -Sin \propto; \quad cos(-\propto) = cos \propto;$$
$$tg(-\propto) - tg \propto; \quad ctg(-\propto) = -ctg \propto;$$

1-мисал. -60^0тук бурчтун синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин тапкыла.

Чыгаруу: Жогоруудагы формулаларды пайдаланабыз.

$$sin(-60^0) = -sin60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$cos(-60^0) = cos60^0 = \frac{1}{2};$$
$$tg(-60^0) = -tg60^0 = -\sqrt{3};$$
$$ctg(-60^0) = -ctg60^0 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

2-мисал. Төмөнкү шарттар аткарылса, $\propto$ кайсы чейректе бүтүүгө тийиш.

а) $sin\alpha > 0$ жана $cos\alpha < 0$;

б) $cos\alpha < 0$ жана $tg\alpha > 0$;

в) $sin\alpha < 0$ жана $ctg\alpha > 0$;

г) $cos\alpha > 0$ жана $ctg\alpha < 0$.

Чыгаруу: Тригонометриялык функциялардын белгилеринин таблицасын пайдаланабыз.

а) α бурчу II чейрекке тиешелүү;

б) α бурчу III чейрекке тиешелүү;

в) α бурчу III чейрекке тиешелүү;

г) αбурчу IV чейрекке тиешелүү.

3-мисал. Туюнтмалардын белгилерин аныктагыла.

а) $sin\frac{\pi}{7}$; г) $ctg\frac{7\pi}{18}$ ж) $tg120^0 \cdot ctg320^0$

б) $cos\frac{2\pi}{3}$; д) $sin110^0 \cdot tg39^0$ з) $sin61^0 \cdot cos190^0$.

в) $tg\frac{\pi}{4}$; е) $cos300^0 \cdot tg150^0$

Чыгаруу: Тригонометриялык функциялардын чейректердеги белгилеринин таблицасын колдонобуз.

а) $sin\frac{\pi}{7} > 0$;

б) $cos\frac{2\pi}{3} < 0$;

в) $tg\frac{\pi}{4} > 0$;

г) $ctg\frac{7\pi}{18} > 0$;

д) $sin110^0 \cdot tg39^0$ мында $sin110^0 > 0$; $tg39^0 > 0$, демек $sin110^0 \cdot tg39^0 > 0$;

е) $cos300^0 < 0$; $tg150^0 < 0$, демек $cos300^0 \cdot tg150^0 > 0$,

ж) $tg120^0 < 0$; $ctg320^0 < 0$; демек $tg120^0 \cdot ctg320^0 > 0$

з) $sin61^0 > 0$; $cos190^0 < 0$, демек $sin61^0 \cdot cos190^0 < 0$

4-мисал. Эгерде $\alpha = \frac{39\pi}{18}$ болсо, анда $sin\alpha, cos\alpha$, $tg\alpha$ жана $ctg\alpha$нын маанилерин тапкыла.

Чыгаруу: Радиандык чендеги $\frac{39\pi}{18}$ бурчун градустук ченге өткөрүп алабыз.

$$\frac{39\pi}{18} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{39\pi}{18} = \frac{10^0 \cdot 39}{1} = 390^0.$$

$$sin\frac{39\pi}{18} = sin390^0 = sin(30^0 + 360^0) = sin30^0 = \frac{1}{2}$$

$$cos\frac{39\pi}{18} = cos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg\frac{39\pi}{18} = tg(30^0 + 2 \cdot 180^0) = tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$ctg\frac{39\pi}{18} = ctg30^0 = \sqrt{3}.$$

5-мисал. Туюнтмалардын маанилерин тапкыла.

а) $sin(-1110^0)$; в) $cos(-450^0)$;

б) $tg(-405^0)$; г) $ctg(-750^0)$

Чыгаруу:

а) $sin(-1110^0) = -sin1110^0 = -sin(30^0 + 3 \cdot 360^0) =$

$$= -sin30^0 = -\frac{1}{2}$$

б) $tg(-405^0) = -tg405^0 = -tg(45^0 + 360^0) = -tg45^0 = -1$
в) $cos(-450^0) = cos\,450^0 = cos(90^0 + 360^0) = cos90^0 = 0$
г) $ctg(-750^0) = -ctg(30^0 + 2 \cdot 360^0) = -ctg30^0 = -\sqrt{3}$

5.4. Бирдей аргументтүү тригонометриялык функциялар арасындагы катыштар.

Негизги тригонометриялык теңдештиктер

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1;$ (1)

$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha};$ (2)

$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha};$ (3)

Бул теңдештиктердин жардамы менен бирдей аргументтүү функциялардын арасындагы катышты туюндуруучу башка формулаларды алабыз.

(2) жана (3) формулалардан $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ (4) формуласы келип чыгат.

(1) формуланын ки жагын тең $cos^2\alpha$ га бөлсөк $\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$ болот, мындан, $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$(5) теңдештиги келип чыгат. Ушундай эле жол менен $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{sin^2\alpha}$(6) теңдештигин алабыз.

Бул формулалар тригонометриялык функциялардын биринин берилген мааниси боюнча калгандарынын маанилерин табууга мүмкүндүк берет.

1-мисал. $sin\alpha = \frac{3}{5}$жана $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болсо, $cos\alpha$ ны, $tg\alpha$ ны жана $ctg\alpha$ ны тапкыла.

Чыгаруу: (1) формуладан$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$же

$cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha}$келип чыгат.

$cos\alpha$ I чейректе оң маанини алгандыктан $\sqrt{1 - sin^2\alpha}$ туюнтманын оң маанисин гана алабыз.

$$cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5};$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}\text{болот.}$$

(4) формуладан $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$экендигин табабыз.

$$ctg\alpha\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Демек, $cos\alpha = \frac{4}{5}$, $tg\alpha = \frac{3}{4}$, $ctg\alpha = 1\frac{1}{3}$болот.

2-мисал. $cos\alpha = -\sqrt{1 - sin^2\alpha}$жана $sin\alpha > 0$болсо, α бурчу кайсы чейрекке тиешелүү экендигин аныктагыла.

Чыгаруу: Тригонометриялык функциялардын чейректердеги белгилеринин таблицасын пайдаланабыз.

$cos\alpha$ *II* жана *III* чейректерде терс болот,

$sin\alpha$ *I* жана *II* чейректерде оң болот.

Маселенин шарты аткарылыш үчүн α бурчу II чейректе бүтүшү керек.

3-мисал. Бир эле учурда:

$tg\alpha = (2 - \sqrt{3})$жана$ctg\alpha = \left(2 + \sqrt{3}\right)$ боло алышабы.

Чыгаруу: $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ формуласын пайдаланабыз.

$$\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 4 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1.$$

Демек, $tg\alpha$ жана $ctg\alpha$ берилген маанилерге бир эле учурда ээ боло алышат.

5.1.-5.4. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

100. Төмөнкү радиандык чендеги бурчтарды градус аркылуу туюнткула.

а) $\frac{5\pi}{12}$; в) $\frac{9\pi}{4}$; д) $\frac{5\pi}{6}$;

б) $\frac{7\pi}{10}$; г) $\frac{3\pi}{5}$; е) $\frac{8\pi}{9}$.

Чыгаруу: Бурчтун радиандык чоңдугун $\frac{180^0}{\pi}$ге көбөйтөбүз:

а) $\frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 5 \cdot 15^0 = 75^0$;

б) $\frac{7\pi}{10} = \frac{7\pi}{10} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 7 \cdot 18 = 126^0$;

в) $\frac{9\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 9 \cdot 45^0 = 405^0$;

г) $\frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 3 \cdot 36^0 = 108^0$;

д) $\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 5 \cdot 30^0 = 150^0$;

е) $\frac{8\pi}{9} = \frac{8\pi}{9} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 8 \cdot 20^0 = 160^0$.

101. Төмөндөгү градустук чен менен берилгенбурчтарды радиан аркылуу туюнткула.

а) 140^0; в) 330^0; д) 250^0;

б) 200^0; г) 170^0; е) 480^0.

Чыгаруу: Градустук чендеги бурчтун чоңдугун радиан аркылуу туюнтуу үчүн, градустук ченди$\frac{180^0}{\pi}$ге бөлөбүз.

а) $140^0 : \frac{180^0}{\pi} = 140^0 \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{7\pi}{9}$;

б) $200^0 : \frac{180^0}{\pi} = 200^0 \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{10\pi}{9}$;

в) $330^0 : \frac{180^0}{\pi} = 330^0 \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{11\pi}{6}$;

г) $170^0 : \frac{180^0}{\pi} = 170^0 \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{17\pi}{18}$;

д) $250^0 : \frac{180^0}{\pi} = 250^0 \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{25\pi}{18}$;

е) $480^0 : \frac{180^0}{\pi} = 480^0 \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{8\pi}{3}$.

102. Айлананын жаасынын узундугу 80см, ал 150^0ту камтыйт. Бул айлананын радиусун тапкыла.

Чыгаруу: L=80 см, $\alpha = 150^0 = \frac{5\pi}{6}$;

$\pi \approx 3$деп алабыз.

$\frac{L}{R} = \alpha$формуласын пайдаланабыз.

Бул формуладан

$R = \frac{L}{\alpha}$келип чыгат.

$R = \frac{80}{\frac{5\pi}{6}} \approx \frac{80}{\frac{15}{6}} \approx 80 : \frac{15}{6} \approx 80 \cdot \frac{2}{5} \approx 32(\text{см})$.

Жообу: $R \approx 32$см.

103. Үч бурчтуктун эки бурчу $\frac{4\pi}{9}$ га жана $\frac{2\pi}{9}$ га барабар. Анын үчүнчү бурчунун градустук ченин тапкыла.

Чыгаруу: Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180^0ка б.а. πрадианга барабар. Үчүнчү бурчту xрадиан деп алсак, төмөндөгүдөй теңдеме түзүгө болот.

$$x + \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{9} = \pi,$$
$$x + \frac{2}{3}\pi = \pi,$$
$$x = \pi - \frac{2}{3}\pi,$$
$$x = \frac{1}{3}\pi, \frac{\pi}{3} = 60^0$$

Жообу: 60^0.

104. Чоңдугу $50^0, 170^0, -130^0, 240^0, -65^0, -253^0$ болгон бурчтар кайсы чейректерде бүтүшөт.

Чыгаруу: 50^0 градустук бурч I чейрекке таандык,
170^0градустук бурч II чейректе жатат,
-130^0тук бурч III чейректе жатат,
240^0тук бурч III чейректе жатат,
-65^0тук бурч IV чейректе жатат,
-253^0тук бурч II чейректе жатат.

105. $sin\alpha$ жана $ctg\alpha$, α нын төмөнкү маанилеринде мааниге ээ болобу?

а) $\alpha = 0$; б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; в) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; г) $\alpha = \pi$

Чыгаруу: а) $sin0 = 0$; $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ болгондуктан $ctg0 =$
$= \frac{cos0}{sin0} = \frac{1}{0}$ мааниге ээ болбойт.

б) $sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $ctg\frac{\pi}{4} = 1$;

в) $sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -sin\frac{\pi}{2} = -1$; $ctg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

г) $sin\pi = 0$; $ctg\pi$ – мааниге ээ болбойт.

106. -45^0 тук бурчтун синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин тапкыла.

Чыгаруу: $sin(-45^0) = -sin45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$cos(-45^0) = cos45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$tg(-45^0) = -tg45^0 = -1;$
$ctg(-45^0) = -ctg45^0 = -1.$

107. Туюнтмалардын белгилерин аныктагыла.

а) $sin\frac{\pi}{9}$; г) $ctg200^0$; ж) $ctg70^0 \cdot cos150^0$;

б) $cos300^0$; д) $tg\frac{\pi}{4} \cdot sin190^0$; з) $tg130^0 \cdot ctg80^0$.

в) $tg170^0$; е) $cos\frac{\pi}{7} \cdot sin\frac{2\pi}{3}$;

Чыгаруу: Тригонометриялык функциялардын чейректердеги белгилерин аныктоо боюнча таблицасын пайдаланабыз.

а) $sin\frac{\pi}{9} > 0$;

б) $cos300^0 > 0$;

в) $tg170^0 < 0$;

г) $ctg200^0 > 0$;

д) $tg\frac{\pi}{4} > 0, \quad sin190^0 < 0, \quad tg\frac{\pi}{4} \cdot sin190^0 < 0$;

е) $cos\frac{\pi}{7} > 0$; $sin\,\frac{2\pi}{3} > 0$; $cos\frac{\pi}{2} \cdot sin\frac{2\pi}{3} > 0$;

ж) $ctg70^0 > 0$; $cos150^0 > 0$; $ctg70^0 \cdot cos150^0 > 0$;

з) $tg130^0 < 0$; $ctg80^0 > 0$; $tg130^0 \cdot ctg80^0 < 0$.

108. α бурчунун мааниси 420^0ка 750^0ка барабар болгон, $sin\alpha$нын, $cos\alpha$нын $tg\alpha$нын жана $ctg\alpha$нын маанилерин тапкыла.

Чыгаруу: $sin420^0 = sin(60^0 + 360^0) = sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$sin750^0 = sin(30^0 + 2 \cdot 360^0) = sin30^0 = \frac{1}{2}$;

$cos420^0 = cos(60^0 + 360^0) = cos60^0 = \frac{1}{2}$;

$cos750^0 = cos(30 + 2 \cdot 360^0) = cos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$tg420^0 = tg(60^0 + 360^0) = tg60^0 = \sqrt{3}$;

$tg750^0 = tg(30^0 + 2 \cdot 360^0) = tg30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$ctg420^0 = ctg(60^0 + 360^0) = ctg60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$ctg750^0 = ctg(30^0 + 2 \cdot 360^0) = ctg30^0 = \sqrt{3}$.

109. Эгер: $\alpha = \frac{7\pi}{3}$ болсо, анда $sin\alpha, cos\alpha, tg\alpha$жана $ctg\alpha$нын маанилерин тапкыла.

Чыгаруу:$sin\frac{7\pi}{3} = sin420^0 = sin(60^0 + 360^0) = sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$cos\frac{7\pi}{3} = cos420^0 = cos(60^0 + 360^0) = cos60^0 = \frac{1}{2}$;

$tg\frac{7\pi}{3} = tg420^0 = tg(60^0 + 360^0) = tg60^0 = \sqrt{3}$;

$ctg\frac{7\pi}{3} = ctg420^0 = ctg(60^0 + 360^0) = ctg60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

110. Туюнтмалардын маанилерин салыштыргыла.

а) $sin60^0$жана$cos(-60^0)$; в) $cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$жана $tg\frac{\pi}{4}$;

б) $tg(-45^0)$жана$ctg\ 30^0$; г) $sin(-\frac{\pi}{2})$жана $ctg(-\frac{\pi}{6})$

Чыгаруу:

а) $sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}; cos(-60^0) = \frac{1}{2}$; демек$sin60^0 > cos60^0$

б)$tg(-45^0) = -1;\ ctg30^0 = \sqrt{3}$демек$tg(-45^0) < tg30^0$

в) $cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0;\ tg\frac{\pi}{4} = 1$демек $cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) < tg\frac{\pi}{4}$;

г) $sin(-\frac{\pi}{2}) = -1;\ ctg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$демек$sin(-\frac{\pi}{2}) < ctg\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

111. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$шартын пайдаланып, төмөнкүлөрдү тапкыла.

а) $sin\alpha = 0{,}5$ болсо, $cos\alpha$ны;

б) $tg\alpha = -3$ болсо, $sin\alpha$ны;

в) $cos\alpha = -\frac{1}{5}$ болсо, $ctg\alpha$ны;

г) $ctg\alpha = -2$ болсо, $cos\alpha$ны.

Чыгаруу: Бул мисалды чыгарууда тригонометриялык функциялардын чейректердеги белгилерин эске алуу зарыл.

а) $cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha}$ формуласын пайдаланабы.

$$cos\alpha = -\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

б) Алгач $ctg\alpha$ны $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$ формуласы менен таап алабыз.

$ctg\alpha = -\frac{1}{3}$болот. Эми $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{sin^2\alpha}$ формуласы менен $sin\alpha$ны табабыз.

$$(-\frac{1}{3})^2 + 1 = \frac{1}{sin^2\alpha}, \qquad \frac{10}{9} = \frac{1}{sin^2\alpha}, \qquad \frac{1}{sin^2\alpha} = \frac{9}{10},$$

$$sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}; \qquad sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

в) Алгач $sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$формуласы менен $sin\alpha$ны таап алабыз.

$sin\alpha = \sqrt{1 - (-\frac{1}{5})^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$;

Эми $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ формуласы аркылуу $ctg\alpha$ны табабыз.

$ctg\alpha = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{24}}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{24}} = -\frac{1}{\sqrt{24}}$,

$ctg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{24}}$.

г) $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$ формуласы боюнча $tg\alpha = -\frac{1}{2}$ экендигин табабыз.

Эми $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$формуласын пайдаланып $cos\alpha$ны табабыз.

$(-\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$, $\frac{5}{4} = \frac{1}{cos^2\alpha}$, $cos^2\alpha = \frac{5}{4}$,

$cos\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

$cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

112. Бир эле учурда $sin\alpha$ жана$cos\alpha$ тиешелүү түрдө:

а) $\frac{1}{2}$ жана$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ге; в) $\frac{1}{5}$ жана $\frac{\sqrt{24}}{5}$ ке,

б) $\frac{2}{7}$ жана$\frac{5}{7}$ ке, г) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ жана $-\frac{2}{3}$ ге барабар болушу мүнкүнбү?

Чыгаруу: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ формуласын пайдаланабыз.

а) $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$;

б) $(\frac{2}{7})^2 + (\frac{5}{7})^2 = \frac{4}{49} + \frac{25}{49} = \frac{29}{49}$;

в) $(\frac{1}{5})^2 + (\frac{\sqrt{24}}{5})^2 = \frac{1}{25} + \frac{24}{25} = \frac{25}{25} = 1$;

г) $(-\frac{\sqrt{5}}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$.

Демек, б) пунктунда болбойт.

113. Бир эле учурда:

а) $tg\alpha = \frac{2}{3}$, $ctg\alpha = 1{,}5$; б) $tg\alpha = 2{,}5$, $ctg\alpha = -2$ болушу мүмкүнбү?

Чыгаруу: $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ формуласын колдонобуз.

а) $\frac{2}{3} \cdot 1{,}5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ болот.

б) $2{,}5 \cdot (-2) = -5$ болбойт.

114. $tg\alpha = \frac{2}{3}$болсо, α бурчунун башка тригонометриялык функцияларынын маанилерин эсептегиле.

Чыгаруу: $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$формуласы боюнча $ctg\alpha = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ болот.

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$формуласы аркылуу $cos\alpha$ны табабыз.

$$(\frac{2}{3})^2 + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}; \quad \frac{9}{4} + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}, \quad \frac{13}{4} = \frac{1}{cos^2\alpha},$$

$cos^2\alpha = \frac{4}{13}, \; cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{4}{13}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13};$

$sin\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$формуласы аркылуу$sin\alpha$ны табабыз.

$sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{13}} = \pm\sqrt{\frac{9}{13}} = \pm\frac{3}{\sqrt{13}} = \pm\frac{3\sqrt{13}}{13}.$

Жообу: $sin\alpha = \pm\frac{3\sqrt{13}}{13}; \; cos\alpha = -\frac{+2\sqrt{13}}{13}; \; ctg\alpha = \frac{2}{3}.$

5.5. Тригонометриялыктуюнтмалардыөзгөртүү, теңдештиктердидалилдөө

Бирдей аргументтүү тригонометриялык функциялардын арасындагы катыштарды туюнтуучу формулалар, тригонометриялык туюнтмаларды жөнөкөйлөтүүдө, теңдештиктерди далилдөөдө кеңири колдонулат.

1-мисал. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

а) $sin^2\alpha - 1 + cos^2\alpha$; в) $\frac{cos^2\alpha}{1-cos^2\alpha}$;

б) $5 - tg\alpha \cdot ctg\alpha$; г) $\frac{ctg\alpha}{tg\alpha}$.

Чыгаруу: а)$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$формуласын пайдаланабыз.

$sin^2\alpha - 1 + cos^2\alpha = sin^2\alpha + cos^2\alpha - 1 = 1 - 1 = 0;$

б) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ формуласын колдонобуз.

$5 - tg\alpha \cdot ctg\alpha = 5 - 1 = 4;$

в) $1 - cos^2\alpha = sin^2\alpha$формуласын колдонобуз.

$\frac{cos^2\alpha}{1-cos^2\alpha} = \frac{cos^2\alpha}{1-cos^2\alpha} = \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = tg^2\alpha;$

г) $\frac{ctg\alpha}{tg\alpha} = \frac{ctg\alpha}{\frac{1}{ctg\alpha}} = ctg^2\alpha.$

2-мисал. Теңдештикти далилдегиле.

а) $1 - sin\alpha \cdot ctg\alpha \cdot cos\alpha = sin^2\alpha;$

б) $(1 - sin\alpha)(1 + sin\alpha) - 1 = -sin^2\alpha;$

в) $(sin\alpha - cos\alpha)^2 + 2sin\alpha \cdot cos\alpha = 1$

г) $sin^2\alpha \cdot ctg^2\alpha - sin^2\alpha + 1 = 2cos^2\alpha.$

Чыгаруу:

а) $1 - sin\alpha \cdot ctg\alpha \cdot cos\alpha = 1 - sin\alpha \cdot \frac{cos\alpha}{sin\alpha} \cdot cos\alpha =$

$= 1 - cos^2\alpha = sin^2\alpha;$

б) $(1 - sin\alpha)(1 + sin\alpha) - 1 = 1 - sin^2\alpha - 1 = -sin^2\alpha;$

в) $(sin\alpha - cos\alpha)^2 + 2sin\alpha \cdot cos\alpha = sin^2\alpha - 2sin\alpha \cdot cos\alpha +$
$+cos^2\alpha + 2sin\alpha \cdot cos\alpha = sin^2 + cos^2\alpha = 1;$

г)$sin^2\alpha \cdot ctg^2\alpha - sin^2\alpha + 1 = sin^2\alpha \cdot \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} + 1 - sin^2\alpha =$
$= cos^2\alpha + cos^2\alpha = 2cos^2\alpha.$

5.6. Келтирүүнүн формулалары

Каалагандай бурчтун синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин тар бурчтун тригонометриялык функцияларына келтирип алуу, маселе-мисалдарды чыгарууда бир кыйла ыңгайлуу болот.

Биз $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$туюнтмасындаk саны 1ден 4кө чейинки маанилерге ээ болгон учурлар үчүн б.а. $\frac{\pi}{2} \pm \alpha,\ \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$жана $2\pi \pm \alpha$ бурчтары үчүн жана келтирүүнүн формулаларын карайбыз.

Келтирүүнүн формулаларынын таблицасы.

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $90^0+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $90^0-\alpha$	$\pi+\alpha$ $180^0+\alpha$	$\pi-\alpha$ $180^0-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ $270^0+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ $270^0-\alpha$	$2\pi+\alpha$ $360^0+\alpha$	$2\pi-\alpha$ $360^0-\alpha$.
$sin\,x$	$cos\,x$	$cos\,x$	$-sin\,x$	$sin\,x$	$-cos\,x$	$-cos\,x$	$sin\,x$	$-sin\,x$
$cos\,x$	$-sin\,x$	$sin\,x$	$-cos\,x$	$-cos\,x$	$sin\,x$	$-sin\,x$	$cos\,x$	$cos\,x$
$tg\,x$	$-ctg\,x$	$ctg\,x$	$tg\,x$	$-tg\,x$	$-ctg\,x$	$ctg\,x$	$tg\,x$	$-tg\,x$
$ctg\,x$	$-tg\,x$	$tg\,x$	$ctg\,x$	$-ctg\,x$	$-tg\,x$	$tg\,x$	$ctg\,x$	$-ctg\,x$

Бул таблицадагы функциялардын өзгөрүшүнө байкоо жүргүзүп, төмөнкүдөй тыянака келүүгө болот.

1) Эгер келтирилүүчү тригонометриялык функциянын аргументи (бурч) $\pi \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ $(180^0 \pm \alpha, 360^0 \pm \alpha)$ түрүндө болсо, анда анын аты өзгөрбөйт.

2) .Эгер келтирилүүчү тригонометриялык функциянын аргументи $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm (90^0 \pm \alpha, 270^0 \pm \alpha)$түрүндө ээ болсо, анда ал аты уйкаш функцияга өзгөрөт.

3. Келтирүүнүн формулаларынын оң жагы келтирилүүчү функция тиешелүү чейректе кандай белгиге ээ болсо, ошол белги менен жазылат.

1-мисал. $sin300^0$ту, $cos410^0$ ту, $tg145^0$ ту жана $ctg170^0$ ту тар бурчтун аты уйкашу же ошол эле тригонометриялык функцияларына келтиргиле.

Чыгаруу: Келтирүүнүн формулаларын пайдаланабыз.

$sin300^0 = sin(270^0 + 30^0) = -cos30^0$;

$cos410^0 = cos(360^0 + 50^0) = cos50^0$;

$tg145^0 = tg(90^0 + 55^0) = -ctg55^0$;

$ctg170^0 = ctg(180^0 - 10^0) = -ctg10^0$.

2-мисал. Төмөнкү тригонометриялык туюнтмалардын маанилерин эсептегиле.

а) $sin\,210^0$; в) $sin\frac{11\pi}{6}$;

б) $cos\,420^0$; г) $tg\frac{7\pi}{6}$;

Чыгаруу: Келтирүүнүн формуласын пайдаланабыз.

а) $sin\,210^0 = sin(180^0 + 30^0) = -sin30^0 = -\frac{1}{2}$

б) $cos\,420^0 = cos(360^0 + 60^0) = cos60^0 = \frac{1}{2}$

в) $sin\frac{11\pi}{6} = sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = -cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

г) $tg\frac{7\pi}{6} = tg\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3-мисал. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

а) $cos(\alpha - \pi)$; г)$cos(270^0 - \alpha)$;

б) $sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; д)$tg(360^0 - \alpha)$;

в) $tg\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ е) $sin(\alpha - 180^0)$;

ж) $ctg(360^0 + \alpha)$; з) $ctg(\alpha - 180^0)$

Чыгаруу: Келтирүүнүн формулаларын колдонобуз.

а) $cos(\alpha - \pi) = cos\big(-(\pi - \alpha)\big) = cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$;

б) $sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = sin(-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -cos\alpha;$

в) $tg\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = tg\left(-\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -ctg\alpha;$

г) $cos(270^0 - \alpha) = -sin\alpha;$

д) $tg(360^0 - \alpha) = tg\alpha;$

е)$sin(\alpha - 180^0) = sin(-(180^0 - \alpha)) = -sin(180^0 - \alpha) =$
$= -sin\alpha;$

ж) $ctg(360^0 + \alpha) = ctg\alpha;$

з) $ctg(\alpha - 180^0) = ctg(-(180^0 - \alpha)) = -ctg(180^0 - \alpha) =$
$= ctg\alpha.$

4-мисал. Туюнтманын маанисин тапкыла.

а) $8sin^2 315^0 - ctg210^0 \cdot tg300^0;$

б) $sin\frac{\pi}{2} \cdot cos\frac{4\pi}{3} \cdot tg\frac{2\pi}{3} \cdot stg\frac{5\pi}{4}.$

Чыгаруу:

а) $8sin^2 315^0 - ctg210^0 \cdot tg300^0 = 8sin^2(270^0 +$
$45^0) — ctg(180^0 + 30^0) \cdot tg(270^0 + 30^0) = 8 \cdot sin^2 45^0 +$
$+ctg^2 30^0 = 4 + 3 = 7;$

б) $sin\frac{\pi}{2} \cdot cos\frac{4\pi}{3} \cdot tg\frac{2\pi}{3} \cdot ctg\frac{5\pi}{4} = 1 \cdot cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot tg\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot$

$$\cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -cos\frac{\pi}{3}\left(-tg\frac{\pi}{3}\right) \cdot tg\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(-\sqrt{3}) \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5-мисал. Эгер α, β жана $\propto$үч бурчтуктун бурчтары болушса, анда:

а) $cos\frac{\alpha+\beta}{2} = sin\frac{\propto}{2};$

б) $cos\alpha = -sin(\beta + \propto)$барбардыктары аткарылаарын далилдегиле.

Далилдөө: а) α, β жана $\propto$ үч бурчтуктун бурчтары болгондуктан $\alpha + \beta + \propto = 180^0$болот.

мындан $\alpha = 180^0 - (\beta + \propto)$ деп алсак болот.

демек, $cos\,\alpha = cos(180^0 - (\beta + \propto)) = -sin(\beta + \propto);$

б)$\alpha + \beta + \propto = 180^0$, $\frac{\propto+\beta}{2} + \frac{\propto}{2} = 90^0$, $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\propto}{2};$

$$cos\frac{\alpha + \beta}{2} = cos\left(90^0 - \frac{\propto}{2}\right) = sin\frac{\propto}{2}$$

6-мисал. Эгер $sin(180^0 + \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ болсо,
анда: а)$sin(90^0 + \alpha)$ны; б) $ctg(270^0 - \alpha)$ны эсептегиле.

Чыгаруу: Алгач αны таап алалы.

$sin(180^0 + \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, келтирүүнүн формуласы боюнча – $-sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 60^0$.

а) $sin(90^0 + \alpha) = cos\,\alpha = cos\,60^0 = \frac{1}{2}$;

б) $ctg(270^0 - \alpha) = tg\alpha = tg60^0 = \sqrt{3}$.

5.5.-5.6. Көнүгүүлөр үчүн тапшырма

115. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

а) $sin^2\alpha + cos^2\alpha - tg\alpha \cdot ctg$; в) $\frac{1-cos^2\alpha}{1-sin^2\alpha} - tg^2\alpha + ctg\alpha$;

б) $\frac{cos^2\alpha+sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha} + 1$; г) $sin\alpha \cdot\ ctg\alpha \cdot cos\,\alpha$

Чыгаруу: Бирдей аргументтүү тригонометриялык функциялардын арасындагы катыштарды туюндуруучу формулаларды пайдаланабыз.

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$; $ctg\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\alpha}$; $tg\alpha \cdot\ ctg\alpha = 1$.

а) $sin^2\alpha + cos^2\alpha - tg\alpha \cdot ctg = 1 - 1 = 0$;

б) $\frac{cos^2\alpha+sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} + 1 = tg^2\alpha + 1 + 1 = tg^2\alpha + 2$;

в) $\frac{1-cos^2\alpha}{1-sin^2\alpha} - tg^2\alpha + ctg\alpha = \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} - tg^2\alpha + ctg\alpha =$
$= tg^2\alpha - tg^2\alpha + ctg\alpha = ctg\alpha$;

г) $sin\alpha \cdot ctg\alpha \cdot cos\,\alpha = sin\alpha \cdot \frac{cos\alpha}{sin\alpha} \cdot cos\,\alpha = cos^2\alpha$.

116. Теңдештиктерди далилдегиле.

а) $\left(\frac{1}{sin^2\alpha} - 1\right) tg^2\alpha = 1$;

б) $(1 + tg\alpha)^2 + (1 - tg\alpha)^2 = \frac{2}{cos^2\alpha}$;

в) $\frac{1}{sin^2\alpha} - \frac{1}{tg^2\alpha} - \frac{cos^2\alpha}{ctg^2\alpha} = cos^2\alpha$;

г) $1 - sin^2\alpha + ctg^2\alpha \cdot sin^2\alpha = 2cos^2\alpha$.

Чыгаруу:

а) $\left(\frac{1}{sin^2\alpha}-1\right)tg^2\alpha=\frac{1-sin^2\alpha}{sin^2\alpha}\cdot\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha}=1$

б) $(1+tg\alpha)^2+(1-tg\alpha)^2=1+2tg\alpha+tg^2\alpha+1-2tg\alpha+$
$+tg^2\alpha=2+2tg^2\alpha=2(1+tg^2\alpha)=2\cdot\frac{1}{cos^2\alpha}$;

в) $\frac{1}{sin^2\alpha}-\frac{1}{tg^2\alpha}-\frac{cos^2\alpha}{ctg^2\alpha}=\frac{1}{sin^2\alpha}-ctg^2\alpha-cos^2\alpha\cdot tg^2\alpha=$
$=\frac{1}{sin^2\alpha}-\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}-sin^2\alpha=\frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha}-sin^2\alpha=1-sin^2\alpha=$
$=cos^2\alpha$;

г) $1-sin^2\alpha+ctg^2\alpha\cdot sin^2\alpha=cos^2\alpha+\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}\cdot sin^2\alpha=$
$=cos^2\alpha+cos^2\alpha=2cos^2\alpha$.

117. $sin240^0$ту, $cos350^0$ ту, $tg\frac{5\pi}{2}$ ни жана $ctg\frac{9\pi}{5}$ ни тар бурчтун тригонометриялык функцияларына келтиргиле.

$sin240^0=sin(180^0+60^0)=-sin60^0$;
$cos350^0=cos(360^0-10^0)=cos10^0$;
$tg\frac{5\pi}{2}=tg\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=ctg\frac{\pi}{4}$;
$ctg\frac{9\pi}{5}=ctg\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-ctg\frac{\pi}{5}$.

118. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

а) $sin(360^0+\alpha)$; г) $ctg(\alpha-180^0)$;
б) $cos(\alpha-180^0)$; д) $sin(\alpha-\frac{3\pi}{2})$;
в) $tg(\alpha-270^0)$; е) $tg(\alpha-\frac{\pi}{2})$.

Чыгаруу: Келтирүүнүн формулаларын пайдаланабыз.

а) $sin(360^0+\alpha)=sin\alpha$;
б) $cos(\alpha-180^0)=cos(-(180^0-\alpha))=cos(180^0-\alpha)=-cos\alpha$;
в) $tg(\alpha-270^0)=tg(-(270^0-\alpha))=-tg(270^0-\alpha)=$
$=-ctg\alpha$;
г) $ctg(\alpha-180^0)=ctg(-(180^0-\alpha))=-ctg(180^0-\alpha)=ctg\alpha$;
д) $sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=cos\alpha$;
е) $tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=tg\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=-tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$.

119. Теңдештикти далилдегиле.

а) $\frac{cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)ctg(\pi-x)}{sin(\frac{\pi}{2}+x)tg(2\pi-x)} = -ctgx;$

б) $cos(9\pi - x) = cos(3\pi - x)$.

Чыгаруу:

а) $\frac{cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)ctg(\pi-x)}{sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)tg(2\pi-x)} = \frac{-sinx(-ctgx)}{cosx\cdot(-tgx)} = \frac{-sinx\cdot(-\frac{cosx}{sinx})}{cosx\cdot(-\frac{sinx}{cosx})} = -\frac{cosx}{sinx} = -ctgx;$

б) $cos(9\pi - x) = cos\big(6\pi + (3\pi - x)\big) = co\,s(3\pi - x) =$
$= cos(2\pi + \pi - x) = cos(\pi - x) = -cosx.$

120. Эгер, $x = 210^0$ болсо, анда $sinx - 2cosx + \frac{1}{2} = \sqrt{3}$ болорун далилдегиле.

Чыгаруу: $sinx - 2cosx + \frac{1}{2} = sin210^0 - 2cos210^0 + \frac{1}{2} =$

$= sin(180^0 + 30^0) - 2cos(180^0 + 30^0) + \frac{1}{2} =$

$= -sin30^0 + 2cos30^0 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$

5.7. Кошуунун формулалары

Эки бурчтун суммасынын косинусу ал бурчтардын косинустарынын көбөйтүндүсүнөн ошол эле бурчтардын синустарынын көбөйтүндүсүн кеми тенге барабар.

$$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\cdot cos\beta - sin \propto\cdot sin\beta \quad (1)$$

Эки бурчтун айырмасынын косинусу ал бурчтардын косинустарынын көбөйтүндүсүнө ошол эле бурчтардын синустарынын көбөйтүндүсүн кошконго барабар.

$$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\cdot cos\beta + sin\alpha\cdot sin\beta \quad (2)$$

Эки бурчтун суммасынын синусу биринчи бурчтун синусу менен экинчи бурчтун косинусунун көбөйтүндүсүн экинчи бурчтун синусу менен биринчи бурчтун косинусунун көбөйтүндүсүн кошконго барабар.

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\cdot cos\beta + sin\beta\cdot cos\alpha \quad (3)$$

Эки бурчтун айырмасынын синусу биринчи бурчтун синусу менен экиничи бурчтун косинусунун көбөйтүндүсүнөн биринчи бурчтун косинусу менен экинчи бурчтун синусунун көбөйтүндүсүн кемиткенге барабар.

$$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha\cdot cos\beta - cos\alpha\cdot sin\beta \quad (4)$$

Тангенс менен котангенс үчүн кошуунун формулалары (1)-(4) формулалардын жардамы менен чыгарылат.

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}; \ (5)$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\alpha \pm tg\beta} \ (6)$$

***1-мисал** .* $sin135^0$ тун маанисин тапкыла.

Чыгаруу: 135^0 ту $90^0 + 45^0$ сумма түрүндө жазып алабыз.

$sin135^0 = sin(90^0 + 45^0) = sin90^0 \cdot cos45^0 + cos90^0 \cdot$

$\cdot sin45^0 = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Жообу: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2-мисал. Туюнтманы жөкөйлөткүлө.

а) $cos(\alpha + \beta) + sin\alpha \cdot sin\beta$;

б) $\frac{(1+tg3x \cdot tg2x)tgx}{tg3x - tg2x}$;

Чыгаруу: а) (1) формуланы пайдаланабыз.

$cos(\alpha + \beta) + sin\alpha \cdot sin\beta = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta + sin\alpha \cdot$

$\cdot sin\beta = cos\alpha \cdot cos\beta$;

б) (6) формуланы пайдаланабыз.

$\frac{(1+tg3x \cdot tg2x)tgx}{tg3x - tg2x} = ctg(3x - 2x) \cdot tgx = ctgx \cdot tgx = 1.$

3-мисал. Төмөнкү туюнтманын маанисин тапкыла.

а) $sin27^0 \cdot cos33^0 + cos27^0 \cdot sin33^0$;

б)$cos215^0 \cdot cos170^0 + sin215^0 \cdot sin170^0$;

в) $\frac{1+tg156^0 \cdot tg96^0}{tg156^0 - tg96^0}$.

Чыгаруу: Кошуунун (3),(2),(6) формулаларын пайдаланабыз.

а) $sin27^0 \cdot cos33^0 + cos27^0 \cdot sin33^0 = sin(27^0 + 33^0) =$

$= sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $cos215^0 \cdot cos170^0 + sin215^0 \cdot sin170^0 =$

$= cos(215^0 - 170^0) = cos45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\frac{1+tg156^0 \cdot tg96^0}{tg156^0 - tg96^0} = ctg(156^0 - 96^0) = ctg60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

4-мисал. а) $sin\alpha = \frac{3}{5}$, $cos\beta = \frac{12}{13}$, α жана βтар бурчтар болсо, анда $sin(\alpha + \beta)$ны, $cos(\alpha - \beta)$ны тапкыла.

б) $tg\alpha = 5$жана$0 < \alpha < 90^0$ болсо, анда $tg(\alpha - \frac{\pi}{4})$тү тапкыла.

Чыгаруу: а) Алгач $cos\alpha$менен$sin\beta$ны таап алабыз.

$cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$;

$sin\beta = \sqrt{1 - cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$;

$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{36}{65} + \frac{20}{65} =$

$= \frac{56}{65}$;

$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{48}{65} + \frac{15}{65} =$

$= \frac{61}{65}$.

б) (5) формуланы пайдаланабыз.

$tg\alpha = 5$; $tg\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\alpha - tg\frac{\pi}{4}}{1 + tg\alpha \cdot tg\frac{\pi}{4}} = \frac{5-1}{1+5\cdot 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;

5-мисал. Теңдештиктерди далилдегиле.

а) $\frac{cos(\alpha+\beta)cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta}{sin(\alpha-\beta) + cos\alpha \cdot sin\beta} = ctg\alpha$;

б) $cos(\alpha + \beta)\, cos\beta + sin(\alpha + \beta)\, sin\beta = cos\alpha$.

Чыгаруу: (1) жана (4) формулаларды пайдаланабыз.

а) $\frac{cos(\alpha+\beta)cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta}{sin(\alpha-\beta) + cos\alpha \cdot sin\beta} = \frac{cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta + sin\alpha \cdot sin\beta}{sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta + cos\alpha \cdot sin\beta} =$

$= \frac{cos\alpha \cdot cos\beta}{sin\alpha \cdot cos\beta} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg\alpha$;

б) (1) жана (3) формулаларды пайдаланабыз.

$cos(\alpha + \beta)\, cos\beta + sin(\alpha + \beta)\, sin\beta = (cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot$
$\cdot sin\beta)cos\beta + (sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta)sin\beta = cos\alpha \cdot$
$\cdot cos^2\beta - sin\alpha \cdot sin\beta \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot cos\beta \cdot \quad sin\beta +$

$+cos\alpha sin^2\beta = cos\alpha cos^2\beta + cos\alpha sin^2\beta = cos\alpha(cos^2\beta + sin^2\beta) =$
$= cos\alpha.$

6-мисал. Төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

а) $cos(\alpha+\beta)\,cos(\alpha-\beta) - sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha-\beta)$;

б) $tg^2\alpha + tg(180^0-\alpha)\cdot\frac{1}{sin\alpha\cdot cos\alpha}$;

Чыгаруу:

а) $cos(\alpha+\beta)\,cos(\alpha-\beta) - sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha-\beta) =$
$= cos(\alpha+\beta+\alpha-\beta) = cos2\alpha$;

б) $tg^2\alpha + tg(180^0-\alpha)\cdot\frac{1}{sin\alpha\cdot cos\alpha} = tg^2\alpha + tg\alpha\cdot\frac{1}{sin\alpha\cdot cos\alpha} =$
$= tg^2\alpha + \frac{sin\alpha}{cos\alpha}\cdot\frac{1}{sin\alpha\cdot cos\alpha} = tg^2\alpha + \frac{1}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha + tg^2\alpha + 1 =$
$= 2tg^2\alpha + 1.$

5.8. Эки эселенген бурчтун тригонометриялык функциялары

Эки эселенген бурчтун тригонометриялык функцияларын ал бурчтун өзүнүн тригонометриялык функциялары аркылуу туюнтуу үчүн, кошуунун формулаларын пайдаланабыз.

Мисалы, $sin(\alpha+\beta) = sin\alpha\cdot cos\beta + cos\alpha\cdot sin\beta$ формуласындагы β ны α менен алмаштырабыз.

$sin(\alpha+\alpha) = sin\alpha\cdot cos\alpha + cos\alpha\cdot sin\alpha = 2sin\alpha\cdot cos\alpha.$

Демек, $sin2\alpha = 2sin\alpha\cdot cos\alpha$(1) формуласын алдык.

Ушул сыяктуу эле

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha \quad (2)$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} (3)$$

$$ctg2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha} (4)$$

формулаларыналабыз. Бул формалалар тригонометриялык туюнтмаларды жөнөкөйлөтүүдө, теңдештиктерди далилдөөдө, тригонометриялык функциялардын маанилерин эсептөөдө кеңири колдонулат.

1-мисал. Эсептегиле.

а) $cos^2 75^0 - sin^2 75^0$; б) $\frac{2tg150^0}{1-tg^2 150^0}$;

Чыгаруу: (2) жана (3) формулаларды колдонобуз.

а) $cos^2 75^0 - sin^2 75^0 = cos2 \cdot 75^0 = cos150^0 =$
$= cos(90^0 + 60^0) = -sin60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

б) $\frac{2tg150^0}{1-tg^2 150^0} = tg2 \cdot 150^0 = tg300^0 = tg(270^0 + 30^0) =$
$= -ctg30^0 = -\sqrt{3}.$

2-мисал. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө.

а) $\frac{sin2\alpha}{cos^2\alpha}$; б) $\frac{2sin^2\alpha}{1+cos2\alpha}$.

Чыгаруу: а) $\frac{sin2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{2sin\alpha \cdot cos\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{2sin\alpha}{cos\alpha} = 2tg\alpha;$

б) $\frac{2sin^2\alpha}{1+cos2\alpha} = \frac{2sin^2\alpha}{sin^2\alpha+cos^2\alpha+cos^2\alpha-sin^2\alpha} = \frac{2sin^2\alpha}{2cos^2\alpha} = tg\alpha.$

3-мисал. $cos\alpha = \frac{4}{5}$жана $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болсо, анда $sin2\alpha$нын маанисин тапкыла.

Чыгаруу: Адегенде $sin\alpha$ нын маанисин таап алабыз.

$$sin\alpha = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5};$$

Эми $sin2\alpha$ нын маанисин табабыз.

$$sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

4-мисал. Теңдештикти далилдегиле.

а) $tg\alpha \cdot (1 + cos2\alpha) = sin2\alpha;$

б) $\frac{cos2\alpha}{sin\alpha \cdot cos\alpha + sin^2\alpha} = ctg\alpha - 1.$

Чыгаруу: а)$tg\alpha \cdot (1 + cos2\alpha) = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \cdot (sin^2\alpha + cos^2\alpha +$
$+cos^2\alpha - sin^2\alpha) = \frac{sin\alpha \cdot 2cos^2\alpha}{cos\alpha} = 2sin\alpha \cdot cos\alpha = sin2\alpha;$

б) $\frac{cos2\alpha}{sin\alpha \cdot cos\alpha + sin^2\alpha} = \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{sin\alpha(cos\alpha + sin\alpha)} = \frac{(cos\alpha - sin\alpha)(cos\alpha + sin\alpha)}{sin\alpha(cos\alpha + sin\alpha)} =$
$= \frac{cos\alpha - sin\alpha}{sin\alpha} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} - \frac{sin\alpha}{sin\alpha} = ctg\alpha - 1.$

5-мисал. Жөнөкөйлөткүлө.

а) $\frac{sin^2 20^0 + cos40^0}{cos^2 20^0}$; б) $\frac{cos54^0}{cos27^0 - sin27^0}$.

Чыгаруу:

а) $\frac{sin^2 20^0+cos40^0}{cos^2 20^0}=\frac{sin^2 20^0+cos2\cdot 20^0}{cos^2 20^0}=\frac{sin^2 20^0+cos^2 20^0-sin^2 20^0}{cos^2 20^0}=$

$=\frac{cos^2 20^0}{cos^2 20^0}=1;$

б) $\frac{cos54^0}{cos27^0-sin27^0}=\frac{cos2\cdot 27^0}{cos27^0-sin27^0}=\frac{cos^2 27^0-sin^2 27}{cos27^0-sin27^0}=$

$=\frac{(cos27-sin27^0)(cos27^0+sin27^0)}{cos27^0-sin27^0}=cos27^0+sin27^0.$

6-мисал. Эгерде $tg\alpha=\sqrt{3}$ болсо, $\frac{cos2\alpha+sin^2\alpha}{sin2\alpha-cos\alpha}$нын маанисин тапкыла.

Чыгаруу: Адегенде $cos\alpha$ жана$sin\alpha$ ны таап алабыз.

$tg^2\alpha+1=\frac{1}{cos^2\alpha}$формуласынан $cos^2\alpha=\frac{1}{tg^2\alpha+1}$ экендигин табабыз.

$cos^2\alpha=\frac{1}{(\sqrt{3})^2+1}=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}.$

Демек, $cos^2\alpha=\frac{1}{4},\ cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

Эми $sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}$ формуласы аркылуу $sin\alpha$ ны табабыз.

$sin\alpha=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$

Берилген туюнтманы жөнөкөйлөтүп алалы.

$\frac{cos2\alpha+sin^2\alpha}{sin2\alpha-cos\alpha}=\frac{cos^2\alpha-sin^2\alpha+sin^2\alpha}{2sin\alpha\cdot cos\alpha-cos\alpha}=\frac{cos^2\alpha}{cos\alpha(2sin\alpha-1)}=\frac{cos\alpha}{2sin\alpha-1}=$

$=\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1}==\frac{1}{2(\sqrt{3}-1)};$

5.7.–5.8. Көнүгүүлөр үчүн тапшырмалар

121. Туюнтмалардын маанилерин тапкыла.

а) $cos71^0\cdot cos20^0-sin70^0\cdot sin20^0-cos91^0;$

б) $sin44^0\cdot cos16^0+cos44^0\cdot sin16^0.$

Чыгаруу: а) $cos71^0\cdot cos20^0-sin71^0\cdot sin20^0-cos91^0=$
$=cos(71^0+20^0)-cos91^0=cos91^0-cos91^0=0;$

б) $sin44^0\cdot cos16^0+cos44^0\cdot sin16^0=sin(44^0+16^0)=$
$=sin60^0=\frac{\sqrt{3}}{2};$

122. Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

а) $ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \frac{sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta}$; б) $\frac{cos(\alpha-\beta)-2cos\alpha\, cos\beta}{2sin\alpha \cdot cos\beta - sin(\alpha-\beta)}$.

Чыгаруу:

а) $ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \frac{sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} \cdot \frac{cos\beta}{sin\beta} \cdot \frac{sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta} =$

$$= \frac{sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta}{sin\alpha \cdot sin\beta} = \frac{sin\alpha \cdot cos\beta}{sin\alpha \cdot sin\beta} + \frac{cos\alpha \cdot sin\beta}{sin\alpha \cdot sin\beta} =$$

$$= \frac{cos\beta}{sin\beta} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg\beta + ctg\alpha;$$

б) $\frac{cos(\alpha-\beta)-2cos\alpha cos\beta}{2sin\alpha cos\beta - sin(\alpha-\beta)} = \frac{cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta - 2cos\alpha cos\beta}{2sin\alpha cos\beta - sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta} =$

$$= \frac{sin\alpha \cdot sin\beta - cos\alpha cos\beta}{sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha sin\beta} = \frac{-cos(\alpha+\beta)}{sin(\alpha+\beta)} = -ctg(\alpha+\beta)$$

123. α жана β бурчтары IVчейректе бүтсө жана $cos\alpha = \frac{4}{5}$, $cos\beta = \frac{5}{13}$болсо,анда$sin(\alpha+\beta)$ны, $cos(\alpha-\beta)$ны, $tg(\alpha-\beta)$ны жана $ctg(\alpha+\beta)$ны эсептегиле.

Чыгаруу: Адегенде $sin\alpha$ жана $sin\beta$ны таап алабыз. Алар IV чейректе терс болушат.

$$sin\alpha = -\sqrt{1-cos^2\alpha} = -\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5};$$

$$sin\beta = -\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2} = -\sqrt{1-\frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13};$$

Демек, $sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha cos\beta =$

$$= -\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{3}{13} - \frac{48}{65} = -\frac{63}{65};$$

$$cos(\alpha-\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{4}{13} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}.$$

$tg(\alpha-\beta)$жана $ctg(\alpha+\beta)$нын маанилерин табуу үчүн $sin(\alpha-\beta)$ жана $cos(\alpha+\beta)$нын маанилерин табышыбыз керек.

$$sin(\alpha-\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sin\beta=$$
$$=-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}-\frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{3}{13}+\frac{48}{65}=\frac{33}{65}$$
$$cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{4}{13}-\frac{36}{65}=-\frac{16}{65}$$
$$tg(\alpha-\beta)=\frac{sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{33}{65}}{\frac{56}{65}}=\frac{33}{56},$$
$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{cos(\alpha+\beta)}{sin(\alpha+\beta)}=\frac{-\frac{16}{65}}{-\frac{63}{65}}=\frac{16}{63}.$$

124. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө.

а) $\frac{sin2\alpha-cos\alpha}{2sin^2\alpha-sin\alpha}$; в) $\frac{1-cos^2\alpha}{sin2\alpha}$;

б) $\frac{cos2\alpha+sin^2\alpha}{sin^2\alpha}$; г) $tg\alpha\cdot ctg\alpha-cos2\alpha$;

Чыгаруу:

а) $\frac{sin2\alpha-cos\alpha}{2sin^2 2-sin\alpha}=\frac{2sin\alpha\cdot cos\alpha-cos\alpha}{sin\alpha(2sin\alpha-1)}=\frac{cos\alpha(2sin\alpha-1)}{sin\alpha(2sin\alpha-1)}=ctg\alpha.$

б) $\frac{cos2\alpha+sin^2\alpha}{sin^2\alpha}=\frac{cos^2\alpha-sin^2\alpha+sin^2\alpha}{sin^2\alpha}=\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}=ctg^2\alpha$

в) $\frac{1-cos^2\alpha}{sin2\alpha}=\frac{sin^2\alpha}{2sin\alpha\cdot cos\alpha}=\frac{sin\alpha}{2cos\alpha}=\frac{1}{2}tg\alpha$

г) $tg\alpha\cdot ctg\alpha-cos2\alpha=1-cos^2\alpha+sin^2\alpha=sin^2\alpha+sin^2\alpha=$
$=2sin^2\alpha.$

125. Теңдештиктерди далилдегиле.

а) $(sin\alpha+cos\alpha)^2-1=sin2\alpha;$ в) $\frac{ctg\alpha}{ctg2\alpha-tg\alpha}=2cos^2\alpha;$

б) $\frac{4sin\alpha\cdot cos\alpha\cdot cos2\alpha}{cos^2\alpha-sin^2\alpha}=2sin2\alpha;$ г) $\frac{cos^2\alpha}{sin2\alpha}=\frac{1}{2}.$

Чыгаруу:

а) $(sin\alpha+cos\alpha)^2-1=sin^2\alpha+2sin\alpha\cdot cos\alpha+cos^2\alpha-1=$
$=1+2sin\alpha\cdot cos\alpha-1=sin2\alpha;$

б) $\frac{4sin\alpha\cdot cos\alpha\cdot cos2\alpha}{cos^2\alpha-sin^2\alpha}=\frac{2sin2\alpha cos2\alpha}{cos2\alpha}=2sin2\alpha;$

в) $\frac{ctg\alpha}{ctg2\alpha - tg\alpha} = \frac{ctg\alpha}{\frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}+tg\alpha} = \frac{ctg\alpha}{\frac{1-tg^2+2tg^2\alpha}{2tg\alpha}} = \frac{2ctg\alpha \cdot tg\alpha}{1+tg^2\alpha} =$

$$= \frac{2}{\frac{1}{cos^2\alpha}} =$$

$$= 2cos^2\alpha;$$

г) $\frac{cos^2\alpha \cdot tg\alpha}{sin2\alpha} = \frac{cos^2\alpha \cdot \frac{sin\alpha}{cos\alpha}}{2sin\alpha \cdot cos\alpha} = \frac{cos\alpha \cdot sin\alpha}{2sin\alpha \cdot cos\alpha} = \frac{1}{2}.$

126. Жөнөкөйлөткүлө.

а) $\frac{sin70^0}{cos70^0+sin^2 350}$; б) $\frac{sin\,84^0}{2cos^2 42^0}$;

в) $\frac{cos50^0 - sin50^0}{cos100^0}$; г) $\frac{1-tg15^0}{2tg15^0} - (ctg30^0 - 1)$.

Чыгаруу:

а) $\frac{sin70^0}{cos70^0+sin^2 35^0} = \frac{2sin35^0 \cdot cos35^0}{cos^2 35^0 - sin^2 35^0 + sin^2 35^0} = \frac{2sin35^0 \cdot cos35^0}{cos^2 35^0} =$

$$= \frac{2sin35^0}{cos35^0} = 2tg35^0;$$

б) $\frac{sin84^0}{2cos^2 42^0} = \frac{2sin42^0 \cdot cos42^0}{2cos^2 42^0} = \frac{2sin42^0}{2cos42^0} = tg42^0;$

в) $\frac{cos50^0 - sin50^0}{cos100^0} = \frac{cos50^0 - sin50^0}{cos^2 50 - sin^2 50} =$

$$= \frac{cos50^0 - sin50^0}{(cos50^0 + sin50^0)(cos50^0 - sin50^0)} = \frac{1}{cos50^0 + sin50^0};$$

г) $\frac{1-tg15^0}{2tg15^0} - (ctg30^0 - 1) = ctg30^0 - ctg30^0 + 1 = 1.$

127. Эсептегиле.

а) $cos^4 120^0 - sin^4 120^0$; б) $tg\frac{\pi}{8} + ctg\frac{\pi}{8}$.

Чыгаруу:

а) $cos^4 120^0 - sin^4 120^0 = (cos^2 120^0 + sin^2 120^0)$

$(cos^2 120^0 - -sin^2 120^0) = cos240^0 = cos(180^0 + 60^0) =$
$-cos60^0 = -\frac{1}{2};$

б) $tg\frac{\pi}{8}+ctg\frac{\pi}{8}=\frac{sin\frac{\pi}{8}}{cos\frac{\pi}{8}}-\frac{cos\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8}}=\frac{sin^2\frac{\pi}{8}-cos^2\frac{\pi}{8}}{cos\frac{\pi}{8}sin\frac{\pi}{8}}=\frac{cos\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}sin\frac{\pi}{4}}=2ctg\frac{\pi}{4}=2.$

128. Эгерде $tg\alpha=\frac{3}{4}$ болсо, анда $sin(2\alpha+5\pi)$нин маанисин тапкыла.

Чыгаруу: Адегенде $cos\alpha$ нын жана $sin\alpha$ нын маанилерин таап алабыз.

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{cos^2\alpha},\qquad \frac{9}{16}+1=\frac{1}{cos^2\alpha},\qquad \frac{25}{16}=\frac{1}{cos^2\alpha},$$

$cos^2\alpha=\frac{16}{25},\ cos\alpha=\frac{4}{5};$

$$sin^2\alpha=1-cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25},\ sin\alpha=\frac{3}{5},$$

$sin(2\alpha+5\pi)$=келтирүүнүн формуласын пайдаланабыз.

$=sin(4\pi+2\alpha+\pi)=sin(2\alpha+\pi)=-sin2\alpha=-2sin\alpha\cdot$

$\cdot cos\alpha=-2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{24}{25}.$

Пайдаланылган адабияттар:

1. М. Иманалиев, А.Асанов, К.Жусупов, С.Искандаров. Алгебра, 9-класс үчүн окуу китеби. Бишкек, 2006;

2. В.Г.Болтянский, Ю.В.Сидоров, М.И.Шабунин. Лекции и задачи по элементарной математике. Москва, «Наука», 1972;

3. А.Н.Филлипов. Домашняя работа по алгебре за 9 класс. Москва, «Экзамен», 2012;

4. И.А.Крутова, А.С.Крутова. Математика в таблицах и схемах. Санкт-Петербург, 2013.

М А З М У Н У